

I-782

Fokker-Planck 方程式の数値解法に基づく免震構造の不規則応答評価

京都大学大学院 学生員 ○澤木夕紀彦
 京都大学工学部 正員 五十嵐 晃
 京都大学工学部 正員 家村 浩和

1.はじめに

非線形復元力特性による履歴エネルギー吸収を利用した免震装置を用いた、免震構造物の地震時の動的挙動は、等価線形化法を用いるか、限られた数の代表的な強震記録を入力として用いた非線形応答解析を行った結果を基に考察される場合が多い。

本研究では不規則応答評価のアプローチから特に摩擦ダンパーを用いた免震構造系に対し、Fokker-Planck 方程式を導きそれを数値的に解いた結果に基づいて、その非線形性のもたらす応答の線形モデルとの相違についての検討を行った。

2.Fokker-Planck方程式による構造物の不規則応答の表現

Fig1に免震支承に摩擦ダンパーを使った橋梁のモデル図を示した。摩擦ダンパーは摩擦力を伴った摺動によって地震動エネルギーを消費することにより減衰性能を得るものであり、積層ゴム支承などのアイソレーターと組み合わせて使用される。

一般にFig1(d)で表される1自由度系の運動方程式は質量 M 、線形バネ係数 k 、粘性減衰係数 c 、摩擦係数 μ 、重力加速度 g 、単位強度の白色雑音を $\xi(t)$ 、外力の大きさを λ とし、質点の変位を y で表すと以下の様になる。

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \mu g M \text{Sign}(\dot{y}) = -M\lambda \xi(t), \quad v = \frac{dy}{dt}$$

この式より以下のFokker-Planck方程式が導かれる。ただし p は変位と速度に関する同時確率密度関数である。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial y} - k y \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\mu g \text{Sign}(v) + cv \right) p \right] + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}, \quad p = p(y, v, t)$$

3.数値解法

本研究では、速度と変位がなす相平面を無限遠点まで含めて確率が保存される系を考える場合に、この無限領域での解を得ることが必要である。

よって $y = \tan \phi$ 、 $v = \tan \psi$ の変換を用いることで無限領域を $\phi, \psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ の閉じた領域に変換することにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -\cos^2 \phi \frac{\partial (\tan \psi \cdot P)}{\partial \phi} + \cos^2 \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(k \tan \phi + c \tan \psi) P \right] \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \cos^4 \psi \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} - \lambda^2 \sin \psi \cos^3 \psi \frac{\partial P}{\partial \psi} \end{aligned}$$

$$p(y, v, t) = P(\phi, \psi, t) \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, v)}$$

$$\text{boundary condition } P = 0 \quad (\phi = \pm \pi/2, \psi = \pm \pi/2)$$

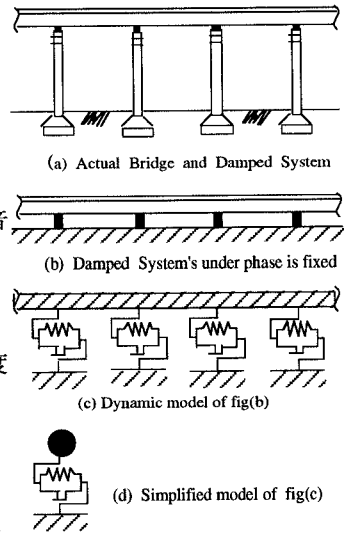


Fig 1 Model of structure used for subject of numerical calculation

数値解法のための離散化と数値積分には差分法の1つである、Alternative Direction Implicit Methodを用いた。ここでは差分化で1階微分の項に3次精度上流差分式、2階微分の項に5点対称公式を用いた。この選択により十分に良い解の性質が確保できた。

4.数値計算例

例として用いた構造系のパラメーターをTable 1に示す。 $y=v=0$ の初期状態のもとで、白色雑音が $t=0$ の時点より構造系にかかり始めた場合に上式により同時確率密度関数を求めた。対応する初期条件は $p(y, v, 0) = \delta(y) \delta(v)$ であり数値計算においてこれになるべく近いものを与えた。2.0秒後の確率分布をそれと同じ平均値と標準偏差を持つ正規分布と比較してFig2,3に示す。特に速度の確率密度が尖った形状を示すなど正規分布とは異なる性質がわかる。

5.等価線形化モデルとの比較

摩擦ダンパー単体の復元力特性は一般に剛塑性型であるが、アイソレーター復元力と組み合わせた場合の復元力特性は、バイリニア型にモデル化することができる。(Fig4)等価線形化法でこのようにして摩擦ダンパー系を等価剛性と等価減衰定数の2つの特性値によって表現する。ここではガウス乱数に

Table 1 . Value of parameters

質量 M	$2.16 \times 10^6 \text{ kg}$
線形バネ係数 k	$37.89 \times 10^5 \text{ N/m}$
粘性減衰係数 c	$9.05 \times 10^5 \text{ N s/m}$
摩擦係数 μ	0.1
白色雑音の強度 λ	66.7 gal

よって発生する離散化白色雑音過程のサンプル時系列を構造系に入力した時の変位応答のピーク値を振幅と見て、十分長い時間についての平均値を有効振幅として求めた結果、ここでは0.0789mとなった。Fig5に復元力変位の履歴曲線を示す。等価線形化法により求められた、等価剛性と等価減衰定数を持つ線形モデルに対する解と摩擦のあるものとの系の特性値を用いた解の比較を変位、速度の確率分布の標準偏差の時系列で表し、比較したものをFig6,7に示す。摩擦のある系は等価な線形系に比べ、応答値分散の挙動の相違があることが分かる。ここで用いた等価線形化法では系の定常的な応答を反映した特性値を近似的に用いているのに対し、Fokker-Planck方程式は非線形免震系の過渡応答の段階での状態を算出する手法であることに留意する必要がある。数値計算によれば特に速度の確率分布が尖った形状を示しているなど、等価線形化法において予測される確率分布である正規分布とは異なっている。

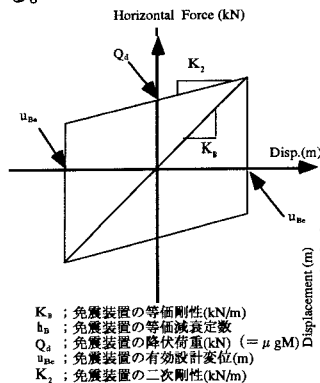


Fig 4 Bilinear Model of Friction Damped System

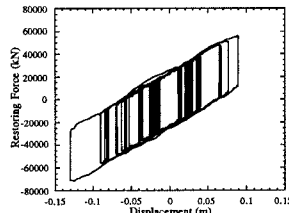


Fig 5 Hysteresis Loop

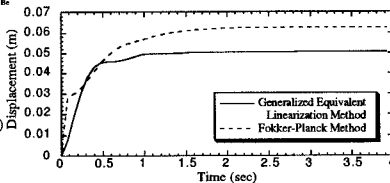


Fig 6 Time History of Standard Deviation of Displacement

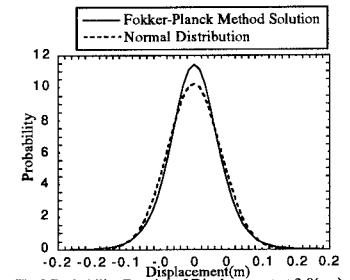


Fig 2 Probability Density of Displacement at 2.0(sec)

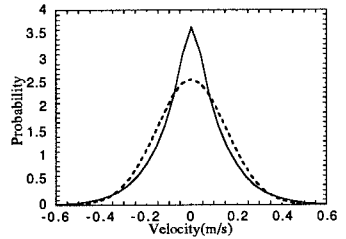


Fig 3 Probability Density of Velocity at 2.0(sec)

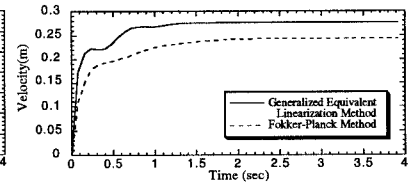


Fig 7 Time History of Standard Deviation of Velocity

6.初通過確率問題の数値解析

免震構造系がある特定の変位を初めて超える確率について考察する。このような問題は、免震構造系の設計上のパラメーターとして最大許容変位の合理的な設定と関連する、工学的に極めて重要な問題であると考えられる。時刻tまでにある設定変位を超えないという確率を求めるには設定変位をなす面において吸収壁境界条件を指定する。この場合初期時刻において原点を出発した確率流がそこに到達した瞬間に消滅してしまい境界内に戻ってくることはない。従って境界内の全確率は、時刻0から常に設定変位以内に留まるという事象の起こる確率に等しい。

Fig 8において縦軸は時刻tに境界から流出する確率流を表している。全時刻に渡って積分すれば1となる。設定変位の位置を平均ピーク値である7.89cmと、その位置から50%,200%の3.94cm, 15.78cmに取り、全確率の減少の様子を見た。

どの場合でも外力が入力した直後の時刻において最も確率の流出が多いが、吸収壁の位置が原点に近いほど、初めの時刻における流出が多くなっている。しかし確率の減少が0に漸近する直前では、原点から遠いほどわずかながら確率の流出量が多くなっている。

《参考文献》

- 1)建設省、道路橋の免震設計法マニュアル（案）、財団法人 土木研究センター、平成4年
- 2)小倉久直、続 物理 工学のための確率過程論、コロナ社、1985
- 3)C.A.J.Flecher、コンピュータ流体力学、シュプリンガー・フェアラーク東京、1993

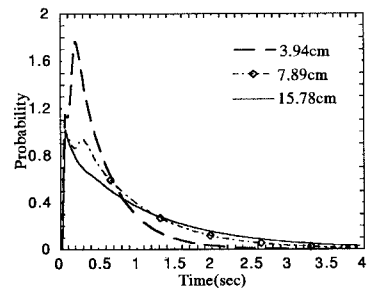


Fig 8 Probability Density of First Excursion Time