

東京大学大学院 学生員 松本 泰尚
 東京大学工学部 正 員 藤野 陽三

1. はじめに 自然風に含まれる乱れに起因する構造物のガスト応答の予測は、一般に定常ランダムな過程として捉えたガストに対する線形応答として、スペクトル解析と振動モード解析を組み合わせた周波数領域の解析を用いて行われている。しかしこの手法によると、計算上の複雑さから振動モード間の相関を無視することが多く、構造物の振動に起因する非定常空気力による空力連成を考慮した解析も困難である。また、多重積分を含むため多くの計算時間が必要となる。さらに、周波数領域上の解析で部材の非弾性応答などを含んだ非線形問題を解くことは事実上不可能となる。

そこで本研究では、吊形式橋梁などの線状構造物を対象として、変動風速・空力アドミッタンス・構造物をそれぞれホワイトノイズを入力とする一種のフィルターとして捉えて状態方程式表示し、さらに非定常空気力を有限次数近似モデル¹⁾を用いて振動数に依存しない微分方程式で近似的に表現することにより、自励空気力を考慮したガスト応答を時間領域で定式化することを試みた。

2. 変動風速と空力アドミッタンスの状態方程式表示 まず、構造物を多質点系として近似する。以下、各点における変動風速を表すフィルターを状態方程式表示する手順について述べるが、空力アドミッタンスについても同様の手法が適用できる。

2-1 スペクトルの有理関数近似 はじめに、風速変動成分のスペクトルを周波数領域で有理関数近似する。この際、未定パラメータの決定には非線形最適化手法であるNelder-Mead Simplex法を用いた。その結果、変動風速に関しては、分母が4次、分子が2次の有理関数で誤差5%程度の近似が得られた。例として、カルマンによる鉛直ガストのパワースペクトルに対する近似結果を図1に示す。

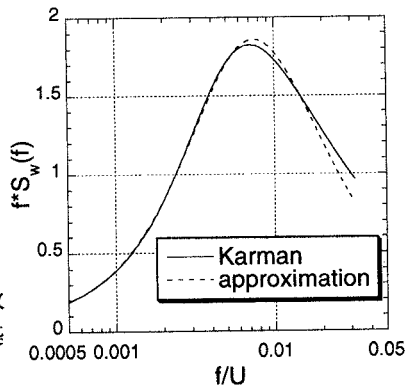


図1 パワースペクトルの近似

2-2 スペクトル行列の分解(factorization) 次に、有理関数近似したスペクトルを用いて変動風速場を表す行列 $\Phi_0(s)$ を構築する。ここで、フィルターの入出力と伝達関数との関係

$$\Phi_0(s) = G(-s)G^T(s)$$

から、スペクトル行列 $\Phi_0(s)$ を分解することにより、伝達関数行列 $G(s)$ を求める。この行列の分解は、実際にはスペクトル行列 $\Phi_0(s)$ を段階的に単位行列に変換し、その各段階の積を取ってもとのフィルターの逆変換を求めるものである。

この分解(factorization)の概念図を図2に示す²⁾。

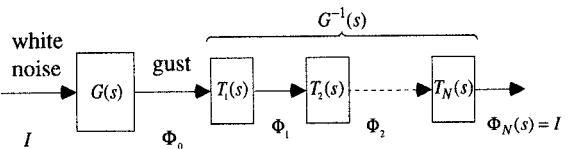


図2 factorizationの概念図

2-3 フィルターの状態方程式表示 こうして得られたフィルターの周波数領域での表現である伝達関数行列を、線形システム理論³⁾に基づき時間領域での表現である状態方程式で表す。

$$\dot{\mathbf{x}}_g(t) = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g(t) + \mathbf{B}_g \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}_g(t) = \mathbf{C}_g \mathbf{x}_g(t)$$

ただし、 $\mathbf{w}(t)$ はホワイトノイズである。これにより、空間相関を考慮した定常ランダムな過程としての変動風速を時間領域の微分方程式で表すことができる。

3. 非定常空気力の有限次数近似モデル 通常非定常空気力は、振動数依存の非定常空気力係数を用いて表される。ここでは、有限次数近似モデルを適用し、非定常空気力 $\mathbf{C}_t$ を次のように振動数に依存しない微分方程式で近似的に表現する。

$$\mathbf{C}_t = \left(\frac{B}{U} \right) \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{q} + \sum_{l=1}^{n_l} \mathbf{D}_l x_l, \quad \left(\frac{B}{U} \right) \dot{x}_l = -\lambda_l x_l + \mathbf{E}_l \mathbf{q}$$

$$\mathbf{q} = [h/B \quad \alpha]^T \quad (h: \text{鉛直変位}, \alpha: \text{水平変位})$$

このとき、構造物が振動数 ω で調和振動していると仮定すると、非定常空気力の複素振幅は

$$\bar{\mathbf{C}}_t = \bar{\mathbf{Q}}(ik) \bar{\mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{Q}}(ik) = \mathbf{A}_0 + (ik) \mathbf{A}_1 + \sum_{l=1}^{n_l} \frac{1}{ik + \lambda_l} \mathbf{D}_l \mathbf{E}_l$$

のような有理多項式となる。ただし、 $k = B\omega/U$ は無次元円振動数である。風洞実験で得られる非定常空気力係数を最もうまく近似するように、非線形最適化により未定パラメータを決定すれば、振動数に依存しない非定常空気力の近似モデルを構築することができる。

4. ガスト応答を表現する状態方程式 有限次数近似モデルを用いると、非定常空気力を考慮した運動方程式を次のように書くことができる。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t)$$

$\mathbf{y} = [\dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{q} \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{n_l}]^T$, $\mathbf{f}(t)$: ガストによる変動空気力
さらに、変動風速・空力アドミッタンス・構造物それぞれに対して状態方程式で表された3つのフィルターを直列に結合することにより、ガスト応答を表現する線形システムの状態方程式を得る。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t)$$

この定式化により、ガスト応答の二乗平均値は次のリヤプノフ (Lyapunov) 方程式と呼ばれる代数方程式を解くことによって比較的容易に求めることができる⁴⁾。

$$\mathbf{A}\Sigma + \Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$$

5. 二次元平板に対する解析結果 本研究における定式化を用いた例として、鉛直、ねじれの2自由度で振動する剛な二次元平板のガスト応答変位のr.m.s.値を求めた結果を図3、4に示す。ここでは、変動風速成分を3つの点において近似しており、その結果状態方程式の次数は28次となった。図3、4には、周波数依存の非定常空気力を考慮しない解析結果も併せて示している。図3、4からわかるように連成非定常空気力の影響は大きい、時間領域の解析では特別な手順を必要とせずシステマティックに連成空気力の影響が取り入れられる。

6. あとがき 以上のような時間領域における定式化を行うことによる利点としては、設計の際に用いる統計量を容易に求めることができることや、多ケーブルの送電線システムの様な近接モード系の解析や長大橋梁に見られる自励空気力による空力連成を考慮した解析がシステマティックに行えることが挙げられる。しかしながら、多次元問題としての実際の構造物へ本解析法の適用を試みたところ、計算上の制約からfactorizationの段階で問題点が判明し、本論の形のままで本解析法を一般の構造物へ適用することは困難であり、何らかの工夫が必要であることがわかった。

参考文献 1) 増川, 藤野: 「橋桁に作用する非定常空気力の有限次数近似モデル」, 土木学会第49回年次学術講演会概要集, pp1010-1011, 1994 2) M.C.Davis: "Factoring the spectral matrix", IEEE Transactions on Automatic Control, 8(4), pp296-305, 1963 3) T.Kailath: "Linear Systems", Prentice-Hall, 1980 4) A.E.Bryson, Y.-C.Ho: "Applied Optimal Control", Hemisphere, 1975

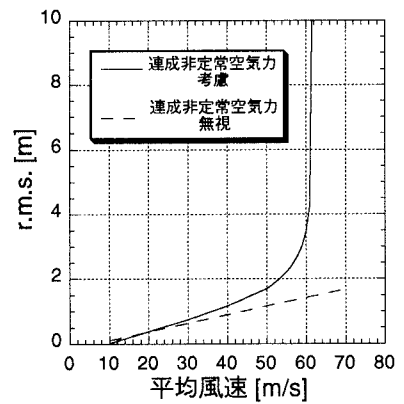


図3 鉛直変位のr.m.s.値

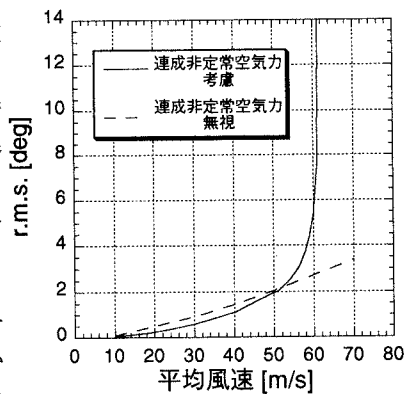


図4 ねじれ変位のr.m.s.値