土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

I－678

固体－水－二相系物体の相互作用解析法の一定式化

日本大学　正会員　塩尻　弘雄

１．緒言

接水構造物等の地震応答の検討に際しては、構造物、地盤、水、堆砂等を取り扱う必要があり、固体－水－二相体系の解析法が必要となる。これまで各種、主として有限要素法に基づく解析法が発表されている。その際、水は、通常、微小振幅非粘性として、ポテンシャルもしくは圧力を変数とする波動方程式に支配されるものと仮定される。一方二相体についてはBiotの方程式に支配されると仮定され、未知変数として、固体の変位Ｕと間隙水の等価相対変位Ｗをとるｕ－Ｗ法と、未知変数としてＵと間隙水圧πをとるＵ－π法が提案されている。前者はBiotの理論を忠実に表現しているが、有限要素法で定式化すると、透水係数の異なる要素間での境界接線方向の間隙水速度の不連続の表現が困難である。一方、後者は、その欠点がなく、自由度も小さいが、間隙水の固体との相対変位に対する慣性力が無視されており、透水係数が十分小さな場合以外は、誤差が生じる。

ここでは、Ｕ、πを未知変数とするが、間隙水の相対変位による慣性力も考慮できる定式化と、固体、水との連成法について述べる。とりあえず周波数領域解析の場合の定式化を行ったが、積分法を決めれば、時間領域に対する定式化も同様な方法で可能である。

２．定式化

２．１　二相体の方程式

物体力は重力のみとし、静的な釣合が動的な釣合に影響を及ぼさないとすれば、動的成分の釣合方程式は、下記で与えられる[1]。

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}-\rho\ddot{\mathbf{U}}-\rho_f\ddot{\mathbf{W}}=0 \qquad (1)$$

$$\nabla\pi-k^{-1}\dot{\mathbf{W}}-m\ddot{\mathbf{W}}-\rho_f\ddot{\mathbf{U}}=0 \qquad (2)$$

ここで、$\boldsymbol{\sigma}$は全応力ベクトル、ρは２相体の密度、ρ_fは間隙水の密度、$\mathbf{L}$は、変位から歪を求める演算子からなる行列、∇はグラディアント、kは透水係数、mは、間隙水の相対運動に関する等価質量である。

構成式は、

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{U}+\alpha\mathbf{m}\pi \qquad (3)$$

$$\pi=\alpha Q e+Q\xi \qquad (4)$$

ここで$\mathbf{D}$は応力－歪行列，$e=\nabla\cdot\mathbf{U}$、$\xi=\nabla\cdot\mathbf{W}$，$\mathbf{m}=\{1、1、\ \}^T$、$\alpha$とQは材料常数である。

周波数領域の解析を考える。角振動数をω、虚数をｉとすれば、式（２）より、

$$\mathbf{W}=-(\rho\omega^2\mathbf{U}+\nabla\pi)/(-i\omega k^{-1}+m\omega^2) \qquad (5)$$

（２）、（５）を（１）に代入し、次式をうる。

$$(\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}+\rho\omega^2-\rho\omega^4/F)\mathbf{U}+(\alpha-\rho\omega^2/F)\nabla\pi=0 \qquad (6)$$

ここで$F=(-i\omega k^{-1}+m\omega^2)$

式（２）に$\nabla\cdot$を作用させて次式を得る。

$$\Delta\pi-k^{-1}(i\omega)\xi+m\omega^2\xi+\rho\omega^2 e=0$$

また、式（４）より$\xi=\pi/Q-\alpha e$であるので、上式に代入して、次式を得る。

$$(1/Q+1/F\cdot\Delta)\pi+(\rho\omega^2/F-\alpha)e=0 \qquad (7)$$

２．２　二相体方程式の離散化

式（６）、（７）対して、次のように内挿関数を用いて、変数を近似する。

$$\mathbf{U}=\mathbf{N}\mathbf{U}、\boldsymbol{\pi}=\mathbf{N}\pi \qquad (8)$$

ガレルキン法により、離散化方程式を求めるものとすれば、一部部分積分を行って、結局次式をうる。

$$\mathbf{K}\mathbf{U}+(\alpha\mathbf{E}+\rho\omega^2\mathbf{C}/F)\boldsymbol{\pi}-(\rho\omega^2-\rho\omega^4/F)\mathbf{M}\mathbf{U}=\int\mathbf{N}^T\boldsymbol{\sigma}_s ds \quad\cdots(9)$$

$$(\alpha\mathbf{E}^T+\rho\omega^2/F\cdot\mathbf{C}^T)\mathbf{U}-1/Q\cdot\mathbf{M}\boldsymbol{\pi}+1/F\cdot\mathbf{P}\boldsymbol{\pi}=\int\mathbf{N}^T W_n ds \quad\cdots(10)$$

ここで、$\mathbf{K}=\int\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dA$,　$\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{N}$, $\mathbf{C}=\int\mathbf{N}^T\nabla\mathbf{N}dA$、　$\mathbf{E}=\int(\nabla\mathbf{N})^T\mathbf{N}dA$

$\mathbf{P}=\int(\nabla\mathbf{N})^T(\nabla\mathbf{N})dA$、　$\mathbf{M}=\int\mathbf{N}^T\mathbf{N}dA$、$\mathbf{M}=\int\mathbf{N}^T\mathbf{N}dA$　$\boldsymbol{\sigma}_s$は境界上の応力ベクトル、W_nはWの法線方向成分である。

２．３　水の取扱い

二相体の扱いと整合をとり、πを未知変数とする。水粒子の変位を$\mathbf{V}$とすれば、オイラーの方程式より

$$\rho_f\mathbf{V}=\nabla\pi$$

となり、周波数領域で表せば次式をうる。

$$\mathbf{V}=-(1/\rho\omega^2)\nabla\pi \quad\cdots(11)$$

また支配方程式は次式で与えられる。

$$(1/C)\pi-\Delta\pi=0$$

周波数領域に変換し、$\rho\omega^2$で除すると、以下の式を得る。

$$(1/\rho_f C)\pi-(1/\rho_f\omega^2)\Delta\pi=0 \quad\cdots(12)$$

ガレルキン法で離散化すると次式を得る。

$$(1/\rho_f)\mathbf{M}\boldsymbol{\pi}+(1/\rho_f\omega^2)\mathbf{P}\boldsymbol{\pi}=(1/\rho_f\omega^2)\int\mathbf{N}^T\pi_n ds \quad\cdots(13)$$

ここでπ_nは、πの外向き法線方向の微分である。

２．４　異種物体間の境界条件

固体と二相体との境界では　$W_n=0$となるが、固体には式（１０）に対応する部分がないので、自然境界条件として満足される。

水と二相体との境界条件は、境界垂直方向の水粒子の変位と応力（圧力）が連続であることである。したがって、

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{n}\pi$$

$$U_n+W_n=V_n$$

となる。ここで$\mathbf{n}$は境界法線方向単位ベクトル，U_n、V_nは、それぞれ$\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$の法線方向成分であり、$U_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{U}$、$V_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}$とかける。また、式（１１）より、$V_n=-(1/\rho\omega^2)\pi_n$となる。

離散化して次式を得る。

$$\int\mathbf{N}^T\boldsymbol{\sigma}_s ds=\int\mathbf{N}^T\mathbf{n}\mathbf{N}ds\,\boldsymbol{\pi} \quad\cdots(14)$$

$$\int\mathbf{N}^T\mathbf{n}\mathbf{N}ds\,\mathbf{U}+\int\mathbf{N}^T W_n ds=\int\mathbf{N}^T(1/\rho\omega^2)\pi_n ds \quad\cdots(15)$$

固体と水との境界条件は、上式において$\mathbf{W}=0$としたものに等しい。

結局、各物体の係数行列は対称で、境界条件を加えても対称性が保たれるため、全体系の係数行列も対称にできる事が示された。

３．結言

固体－水－二相系物体に対する、周波数領域の有限要素法に基づく一定式化を示した。これは、固体部の変位Uと水の圧力の動的成分πを未知数とするものであるが、間隙水の慣性力を正確に表現しており、また、係数行列は対称となる。

なお積分法を決めれば時間領域の有限要素法に基づく同様な定式化も可能である。その定式化、既往の方法との比較等については当日発表する。

参考文献

(1)Simon,B.R.,et.al.,Int.J.Numer.Anal.Meth.Geotech.,Vol.10,pp461-482,1986