

I-669

波線理論に基づくリーキングモードについての考察

佐藤工業(株) 正会員 秋山伸一
早稲田大学 正会員 宮原 玄

1. はじめに

波数と振動数の二重積分で表現される半無限成層弾性体のインパルス応答は、積分径路を変更することで実体波に関連する分岐点回りの積分と表面波の極の留数によって表される。Rosenbaum¹⁾はさらにこの分岐点回りの積分についてもリーキングモードの極の留数で評価できることを示している。ところで、リーキングモードは表面波モードと同様に特性方程式から与えられる固有モードの一種であるので、こうした点に着目すれば実体波を表面波と同じ視点から統一的に評価できる可能性も生まれて来る。ただし、そのためには表面波モードとの関連を通して、リーキングモードの性質を明確にする必要があると考えられる。

筆者らはこれまでに2次元面外波動問題を対象にLove波モードと比較しながらリーキングモードの性質について調べている^{2,3)}。ここでは、さらに波線理論の立場から見たリーキングモードの性質について考察した結果を述べる。

2. 地盤モデルと検討条件

地盤モデルはFig.1に示すように、半無限基盤と水平な表層地盤によって構成されている。図中の μ_j と C_j ($j=0,1$)はせん断剛性とS波速度を示す。次に、Fig.2に示す波線に沿って伝わる波動の水平方向の波数 ξ と鉛直方向の波数 η_j ($j=0,1$)を次式で定義する。

$$\xi = k_j \sin \theta_j, \quad \eta_j = k_j \cos \theta_j \quad (1)$$

ただし、 $k_j = \omega / C_j$ ($j=0,1$)

ここに、 ω は角振動数を表し、 θ_j は実数であれば伝播方向を示す。リーキングモードの波数や振動数は一般に複素数で表されるが、ここでは波数を複素数で与え、振動数を実数に限定して議論を進めることにする。そこで、 θ_j を次式に示す複素数に拡張する。

$$\theta_j = \bar{\theta}_j - i\hat{\theta}_j \quad (0 < \bar{\theta}_j < \pi/2, \hat{\theta}_j > 0) \quad (2)$$

式(2)を用いることにより、式(1)の波数は次式に展開される。

$$\xi = \bar{K}_j \sin \bar{\theta}_j - i\hat{K}_j \cos \bar{\theta}_j \quad (3)$$

$$\eta_j = \bar{K}_j \cos \bar{\theta}_j + i\hat{K}_j \sin \bar{\theta}_j$$

$$\text{ただし、} \bar{K}_j = k_j \cosh \hat{\theta}_j, \hat{K}_j = k_j \sinh \hat{\theta}_j \quad (j=0,1)$$

3. 波線理論に基づく解釈

波線理論によると、Love波は表層地盤内に全反射しながら伝播するSH波の増幅的干渉によって発生する波動と解釈される。ここで、増幅的干渉とはFig.2において波線OAに沿って進む平面波の点Pにおける波面と波線BCに沿って進む平面波の点Bにおける波面が同位相で重なり合うことを意味する。波線理論の立場から見ると、このような増幅的干渉は特性方程式を満たす波動すなわち固有モードによって引き起こされる現象である。一方、リーキングモードもLove波モードと同じ固有モードの一種であるから、このモードについてもLove波と同様に波線理論に基づく解釈が可能であると考えられる。そこで、リーキングモードについてもこうした解釈が成り立つことを以下に示して行く。

まず、Fig.2に示す点Oから点Aに向かって進む波動を次式で表す。

$$u_{OA} = A_0 \exp(-i\xi x - i\eta_1 z) \quad (4)$$

式(4)により、表層地盤内における点Pと点Bの応答は次式で示される。

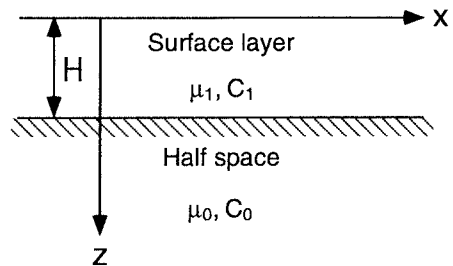


Fig.1. A two-layered model.

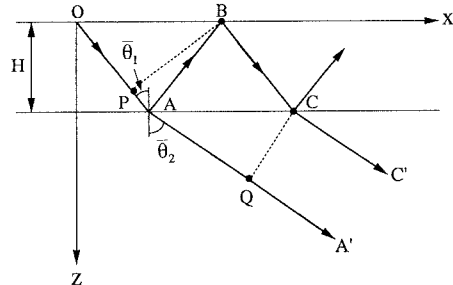


Fig.2. Multiple reflection and refraction.

$$U_P = A_0 \exp(-2i\bar{K}_1 R_A \sin^2 \bar{\theta}_1) \quad (5)$$

$$U_B = A_0 \phi_B \exp(-2i\bar{K}_1 R_A)$$

$$\text{ただし、}\phi_B = \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_0 \eta_0}{\mu_1 \eta_1 + \mu_0 \eta_0}, R_A = \frac{H}{\cos \bar{\theta}_1}$$

さて、ここでは特性方程式を満たす波動を対象にしているので、式(5)の ϕ_B は次式で示される。

$$\phi_B = \exp(2i\bar{K}_1 H \cos \bar{\theta}_1 - 2\hat{K}_1 H \sin \bar{\theta}_1) \quad (6)$$

式(6)により、式(5)の U_P と U_B は次式で関係づけられる。

$$U_B = T \cdot U_P \quad (7)$$

$$\text{ただし、} T = \exp(-2\hat{K}_1 H \sin \bar{\theta}_1)$$

式(7)に示されている T は応答 U_P に対する応答 U_B の比を表している。ここで、 T が複素数であるならば、 U_P と U_B の間には位相差が生じることになる。しかしながら、ここでは式(7)から明らかなように、 T は実数で与えられる。したがって、 U_B と U_P の間には位相差は存在しない。すなわち、点Bの波面と点Pの波面は同位相で重なり合う増幅的干渉が生じることになる。

表層地盤内での反射波に対する展開を半無限基盤内の透過波に当てはめると、点Qと点Cの応答は次式で表される。

$$U_C = T \cdot U_Q \quad (8)$$

$$\text{ただし、} U_Q = 2A_0 \cos \eta_1 H \exp(-3i\bar{K}_1 R_A \sin^2 \bar{\theta}_1 - \hat{K}_1 H \sin \bar{\theta}_1)$$

式(8)に示す U_C と U_Q の関係は式(7)の U_B と U_P の関係と一致しており、半無限基盤内における点Cと点Qの波面の間においても増幅的干渉が生じる。以上のように、波線理論の立場から見ると、Love波モードばかりではなく、リーキングモードも増幅的干渉によって発生する波動として解釈できる。

ところで、Love波モードの場合には式(2)において $\hat{K}_1 = 0$ であるから、 $T = 1$ となる。つまり、Love波モードは振幅を一定に保ちながら多重反射を繰り返す。一方、リーキングモードの場合には $T \leq 1$ となる。すなわち、点Bの応答は常に点Pの応答よりも小さく、また点Cの応答も点Qの応答よりも小さい。このような現象が起こる理由は次のように説明される。点Oから伝わってきた波は点Aで反射する際に、一部が透過波として基盤内に放射される。その結果、点Aで発生する反射波の振幅は入射波の振幅よりも小さくなる。したがって、リーキングモードの場合には多重反射を繰り返す度に振幅が減少することになる。このような性質はLove波モードにはないリーキングモード独自の性質である。

4. 数値計算による応答比 T の算出

ここでは、式(7)に示される応答比 T を実際に求める。まず、Table.1に示す物性値を用いて特性方程式から複素根を求めた後に式(7)より T を算出する。結果をFig.3に示す。Fig.3によると、Love波モードの場合には応答比 T は振動数に関わりなく常に1になる。一方、リーキングモードの場合には、 T は1よりも小さいことが確認できる。しかもこの場合はLove波モードとは異なり、振動数によって T の値が変化する。これは式(2)に示す $\bar{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_1$ が振動数によって変化することに起因する。

5. まとめ

波線理論によると、リーキングモードはLove波モードと同様に表層地盤内を多重反射する平面波の増幅的干渉によって発生する波動と解釈することができる。ただし、リーキングモードはLove波モードとは異なり、多重反射によって振幅が減少する。これは波動のエネルギーが表層地盤から半無限基盤に放射されるためである。

参考文献

- 1) Rosenbaum, J.H.: The Long-Time Response of a Layered Elastic Medium to Explosive Sound, J. Geophy. Res., pp.1577-1613, 1960.
- 2) 秋山, 宮原: 固有モードの重ね合わせによって表現される半無限成層地盤のインパルス応答, 第9回日本地震工学シンポジウム, pp.313-318, 1994.
- 3) 秋山, 宮原: 半無限成層地盤を伝わる弾性波の特性方程式から与えられる固有モードの性質, 土木学会第49回年次学術講演会, pp.1308-1309, 1994.

Table.1. Constants of the model.

	Surface layer	Half space
Depth H(m)	100	—
Shear wave velocity (m/sec)	500	1000
Rigidity(kN/m ²)	5.0×10 ⁵	2.0×10 ⁶

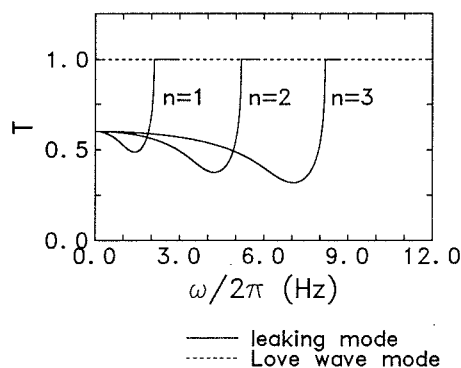


Fig.3. Response ratio of the modes.