

I - 660

偏平アーチの分岐を伴う非線形振動の解析

長崎大学工学部 学生員 ○太田晶一
 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄
 前田建設工業(株) 正 員 鎌田智之

1. まえがき 偏平アーチは構造要素として使用され、また、自重、支持部の出来具合、製作過程などによって生ずる初期変形をもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり、偏平アーチの一種とみなすことができる。偏平アーチの運動方程式には2次および3次の非線形項をもつため、非線形項分岐応答およびカオスが発生することが予想される。そこで、本研究では偏平アーチの運動方程式を多自由度の振動系にモデル化後、Galerkin法を用いて常微分方程式に変換する。次に、両端がヒンジで支えられた偏平アーチを1自由度系にモデル化し、調和バランス法を用いて、1/2数調波共振の応答を求める。ついで、微分方程式を直接数値積分することによって時間応答を求め、偏平アーチの形状パラメータであるライズ比および荷重強度の影響を明らかにする。また、1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動の存在についても明らかにする。

2. 解法 図-1に示すような偏平アーチに周期的変動荷重が作用する場合の非線形曲げ振動の運動方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EA}{2\ell} \int_0^\ell \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 E ：ヤング率、 I ：断面2次モーメント、 A ：断面積、 ℓ ：スパン長、 ρ ：密度、 y_0 ：初期変位、 x ：スパン方向の座標、 t ：時間、 y ：たわみ、 p_0 ：荷重強度、 Ω ：荷重の円振動数。

初期変形は境界条件を満足しなければならないから、次のよう
 関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta \bar{X}(x) \quad (2)$$

ここに $\Delta = \Delta_0/r$ Δ_0 ：初期変形のライズ、 r ：回転半径、 $\bar{X}(x)$ ：形状関数。

式(1)の定常解を解くために $y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$ (ここに、 X_n ：座標関数、 T_n ：未知の時間関数) のよう

な変数分離形にしてGalerkin法を適用すれば次のような時間に関する連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(Q_k^0 R_{\ell n} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{k\ell} \right) T_k T_\ell + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{k\ell m}^n T_k T_\ell T_m = \gamma_n p \cos \bar{\omega} \tau \quad (3)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$ 、 $p = p_0 \ell^4 / EIr$ 、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1$ 、 $\lambda_1 = \ell^4 \sqrt{\rho A \omega_1^2 / EI}$ 。 ω_1 ：線形1次固有円振動数。

3. 両端ヒンジの偏平アーチへの適用 両端ヒンジばりが正弦波で与える初期変位 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ をもつ場合に
 ついて系を1自由度系と仮定し減衰力を考慮すれば、式(3)は次式となる。

$$\ddot{T} + 2h\alpha \dot{T} + \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \right) T + \frac{3}{4} \Delta T^2 + \frac{1}{4} T^3 = \frac{4}{\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (4)$$

ここに、 h ：減衰定数、 $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \Delta^2}$ 。

式(4)の解を次のように仮定する。

$$T = c_0 + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega} \tau + s_1 \sin \bar{\omega} \tau \quad (5)$$

ここに、 c_0, c_1, s_1 ：付随型の振幅成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$ ：分岐型の振幅成分。

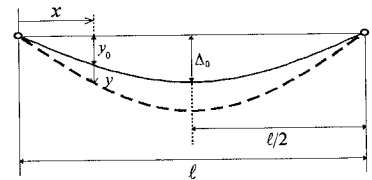


図-1 一般図

式(5)を式(4)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる。これに Newton-Raphson 法を用いて解けば、振幅成分が得られる。式(4)を2元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill 法を適用して直接数値積分すれば、時間応答が得られる。

4. 数値結果 図-2、3には、ライズ比 $\Delta = 3.0$ および 5.0 の2ケースについて減衰定数 $h = 0.005$ とした場合の主調波応答と $1/2$ 分数調波応答を示した。荷重強度は静的応答が 0.5 となるように設定してある。図中において横軸には無次元加振振動数、縦軸には振幅成分をとっている。主調波応答 c_1, s_1 は、あらゆる振動数領域で生じ、実線が外力と同位相の応答、波線が逆位相の応答を示している。

$1/2$ 分数調波共振の応答 $c_{1/2}, s_{1/2}$ は、固有振動数の2倍の振動数領域でのみ生じる。ライズ比 Δ の変化とともに固有振動数は変動するため、 $1/2$ 分数調波共振の発生領域も変わってくる。ライズ比が大きくなると主調波応答の応答振幅は大きくなる。図-2、3、4に Runge-Kutta-Gill 法による応答振幅をプロットしている。図中の○は数値シミュレーションによる周期 T の振幅、□は周期 $2T$ の振幅、△は周期 nT の振幅、×はカオスの振幅を示している。主調波応答から $1/2$ 分数調波応答への遷移時に、数値シミュレーションの応答振幅と一致しない応答が生じている。荷重強度が大きくなるにしたがい主調波応答も応答振幅が大きくなり、主調波応答、 $1/2$ 分数調波応答の発生領域は広くなる。(図-2、4参照)。解析解と数値シミュレーションによる応答は、荷重強度に無関係にはほぼ一致するが、 $1/2$ 分数調波共振近傍では、周期 nT およびカオスが発生しやすい傾向が見られる。

5. まとめ 今回の研究では、偏平アーチに現れる $1/2$ 分数調波共振の特性を明らかにした。 $1/2$ 分数調波共振近傍において主調波応答から $1/2$ 分数調波応答への遷移時で振幅のジャンプ現象が起き、カオスが発生している領域波、解析解と数値シミュレーションと一致しない応答が生じ手いる。

今後、ライズ比の影響を明らかにするとともに $1/2$ 分数調波共振近傍のカオスの応答を他のカオス判定法で明らかにしたい。

参考文献

- 1) 八巻：弾性体の非線形振動、「非線形振動の理論と実際」 教材, pp. 31~50, 1973

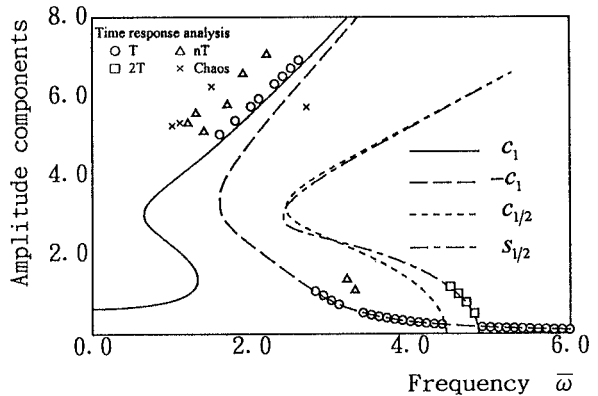


図-2 応答曲線 ($\Delta = 3.0, h = 0.005, p = 33438$)

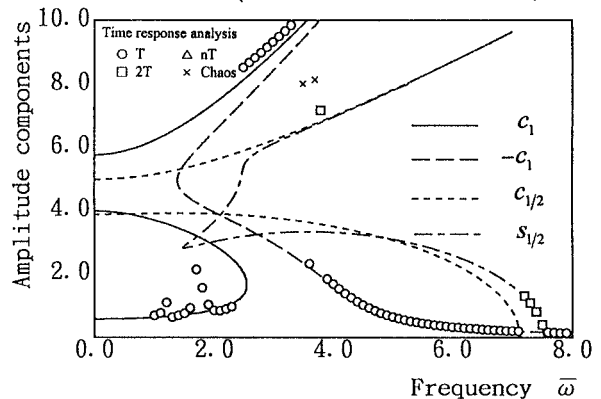


図-3 応答曲線 ($\Delta = 5.0, h = 0.005, p = 7.7188$)

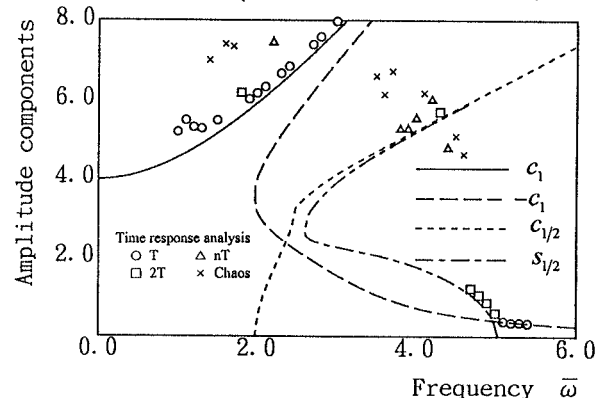


図-4 応答曲線 ($\Delta = 3.0, h = 0.005, p = 8.0000$)