

I - 658

変動軸力と面内荷重を受けるケーブルの非線形振動解析

長崎大学工学部 学生員 ○花田博史 長崎大学工学部 正 員 高橋和雄  
前田建設工業(株) 正 員 鎌田智之 長崎大学工学部 学生員 山口健市

1. まえがき 著者らは、斜張橋などの支持ケーブルの支点が塔もしくは桁の振動によって変動軸力を受ける場合の線形応答を報告した<sup>1)</sup>。しかし、ケーブルは非線形項が強い構造部材であるため応答を求めるには、非線形振動論による解析が必要である。また、変動軸力を受ける場合の非線形運動方程式には係数励振の項が含まれるために調和バランス法による解析は適用できない。そこで、本研究では平均法による解析<sup>2)</sup>を新たに採用し、はじめに周期外力と変動軸力を受ける系の非線形応答の精度および特性を明らかにし、次に変動軸力が作用する偏平ケーブルについて応答振幅に及ぼすサグ比、励振振幅、および粘性減衰力の影響を解析する。

2. 解法 周期外力と変動軸力を受ける偏平ケーブル（サグ比 1/8 以下）の運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{l^2} h - (H_e + H_t \cos v \Omega t + h) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \cos(\Omega t + \varphi) \quad (1)$$

ここに、 $h = \frac{EA}{L_e} \left\{ \frac{8f}{l^2} \int_0^l w dx + \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$ : たわみによる付加張力、 $m$ : ケーブルの質量、 $f$ : ケーブルのサグ、

$l$ : スパン長、 $H_e$ : 初期水平張力、 $H_t$ : 変動張力の振幅、 $p$ : 荷重強度、 $w$ : たわみ、 $t$ : 時間、 $v\Omega$ : 励振力の円振動数、 $\Omega$ : 外力の円振動数、 $\varphi$ : 位相角、 $E$ : ヤング率、 $A$ : 断面積、 $L_e$ : ケーブル長（図-1 参照）

式(1)の解を次のように 1 自由度系に仮定する。

$$w = IT(t)W(x) \quad (2)$$

ここに、 $T$ : 時間関数、 $W$ : 座標関数で線形振動の固有振動数

式(2)を式(1)に代入して、Galerkin 法を適用すれば時間に関する運動方程式が得られる。これに粘性減衰力を考慮すると

$$\ddot{T} + 2h\omega_1 \dot{T} + (\omega_1^2 + C_1 \bar{H}_t \cos v \bar{\omega} \tau) T + C_2 T^2 + C_3 T^3 = C_4 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \varphi) \quad (3)$$

ここに、 $\omega_1$ : 1 次振動の無次元固有円振動数、 $h$ : 減衰定数、 $\bar{H}_t = H_t / H_e$ : 無次元変動軸力の振幅、 $\bar{\omega} = \Omega / n_0$ : 無次元励振振動数、 $\tau = n_0 t$ : 無次元時間、 $C_2, C_3$ : 非線形項の係数。なお、 $\omega_1, C_1, C_2, C_3, C_4$  はケーブルのサグ比  $\gamma = f/l$ 、および縦波・横波伝播速度比  $k = \sqrt{EA/H_e}$  および  $W$  より定まる。

式(3)の近似解を得るために、平均法を用いる。まず近似解を次式で仮定する。

$$T = c_0 + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega} \tau + s_1 \sin \bar{\omega} \tau \quad (4)$$

ここに、 $c_0, c_1, s_1$ : 付随調波成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$ : 分岐調波成分

式(4)を式(3)に代入して平均法を適用すると、平均化方程式が得られる。

この方程式に Newton-Raphson 法を用い、初期値のもとに解けば必要な解が得られる。また、式(4)を 2 元連立の 1 階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill 法を用いると時間応答が得られる。

### 3. 解析結果

#### (1) 解の精度と特性

まず、式(3)を対象に解の精度および特性を調べる。ここで、 $C_1 \bar{H}_t = \alpha, C_4 \bar{p}_0 = \beta$  と置き一般形で考える。図-2 は、パラメータの値を既往の論文<sup>3)</sup> と同じ  $h = 0.01, \omega_1 = 1.0, \alpha = 1.0, \beta = 1.0, \varphi = 0, C_2 = 0, C_3 = 1.0$  とした場合の応答曲線を示している。また、周期外力と励振力の振動数を同じにするため  $v = 1.0$  とした。図において横軸は無次元加振振動数、縦軸は振幅成分である。主調波応答  $c_1$  はあらゆる振動数領域で生じ、 $c_1$  は外力と同位相、 $-c_1$  は外力と逆位相の応答を示している。また、1/2 分数調波共振の応答  $c_{1/2}, s_{1/2}$  は固有振動数の 2 倍の振動数領域でのみで生じている。文献と比較すると両者は一致している。また、数値シミュレ

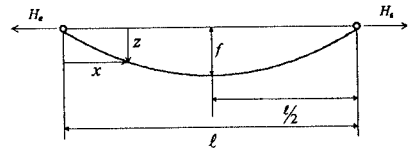


図-1 ケーブルの一般図

ーションによる応答を○でプロットしたが、仮定した周期解については一致している。以上によって平均法の解の精度としては十分であると言える。

一般に2次の非線形項がない場合は、1/2分数調波共振の応答が現れないが、図-2において現れるのは、励振力の影響であると考えられる。

## (2) 変動軸力のみを受けるケーブルの応答

次に、周期的変動軸力のみを受けるケーブル（ $C_4 = 0$ ）について考え、固有振動数の2倍の振動数 $2\omega_1$ の応答振幅に及ぼすサグ比 $\gamma$ 、無次元変動軸力の振幅 $\bar{H}_t$ 、粘性減衰力の影響を示す。ここで、応答振幅はケーブルのスパン長で無次元化されたケーブル中央点の応答振幅とする。

図-3は、 $\bar{H}_t = 0.5$ の場合の応答振幅とサグ比の関係縦波-横波伝播速度比 $k = 30$ と60について示す。また、初期速度 $\dot{T} = 0.005$ と設定して得られた数値シミュレーションの応答を○印でプロットした。サグ比が大きくなるに従い、応答振幅も増大し $k = 30$ では0.025、 $k = 60$ では0.012付近でそれぞれピークとなり、それ以降は減少している。また、あるサグ比において下に凸の応答が現れる（破線）。数値シミュレーションでも現れているが、これは応答曲線で示した1/2分数調波共振の $s_{1/2}$ の応答であり、図-3で実線は $c_{1/2}$ 、破線は $s_{1/2}$ の応答にそれぞれ対応している。このサグ比において、応答は軟化バネ特性を示し、その変動も大きい。また解が2つあり、初期値によってどちらの応答を示すかが決まる。

図-4は、 $k = 30, \gamma = 0.02$ の応答振幅と変動軸力の振幅 $\bar{H}_t$ の関係である。また、粘性減衰力の影響を調べるため、減衰定数 $h = 0.0$ と0.005の場合を比較した。サグ比 $\gamma = 0.02$ の場合には軟化バネ特性を示すために $s_{1/2}$ の応答が現れている。また、 $c_{1/2}$ の応答は、励振力の影響をほとんど受けないが、 $s_{1/2}$ の応答は $\bar{H}_t$ の増加とともに大きくなる。粘性減衰力による影響は変動軸力の振幅 $\bar{H}_t$ が0.1以下で現れ、 $\bar{H}_t$ が大きくなると減衰による影響は見られない。

4. まとめ ケーブルに変動軸力が作用する場合の非線形応答について、平均法による解析的なアプローチを試みた。詳しい内容については当日発表する。

参考文献 1) 高橋・鎌田・町田・松野：土木学会論文集, No. 495/I-28, pp. 127-130, 1994. 7

2) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T.: Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, 1979

3) 津田・田村・末岡：日本機械学会[No. 930-42]機械力学・計測制御講演論文集, (Vol. A), pp. 52-56, 1993. 7

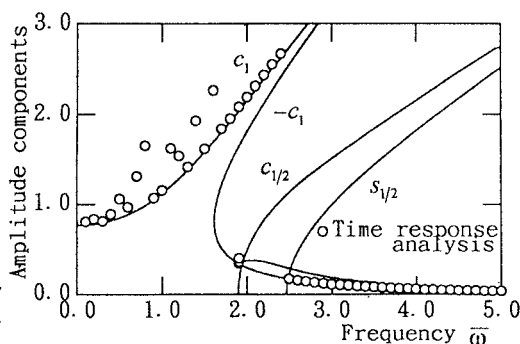


図-2 応答曲線 ( $h = 0.01, \omega_1 = 1.0, \alpha = 1.0, \beta = 1.0, \varphi = 0, C_2 = 0, C_3 = 1.0$ )

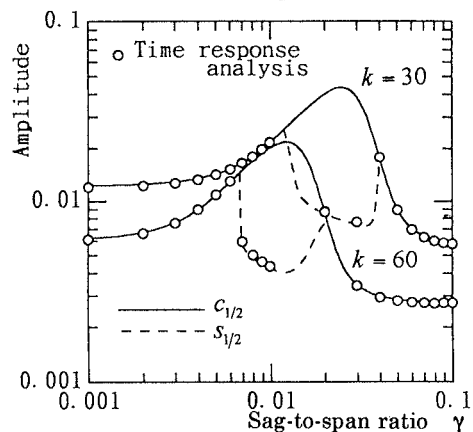


図-3 応答振幅とサグ比の関係 ( $\bar{H}_t = 0.5, h = 0.005$ )

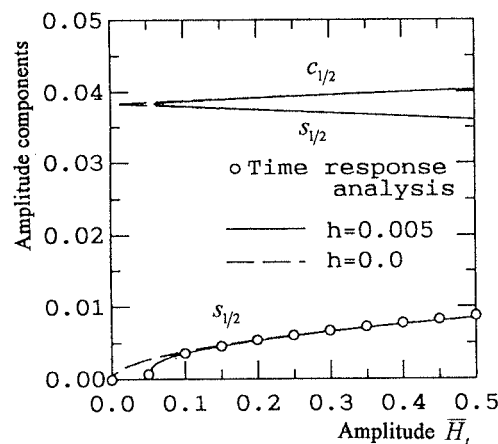


図-4 応答振幅と励振振幅の関係 ( $\gamma = 0.02, k = 30$ )