

I-657

非対称積層長方形板の動的安定特性

三井建設(株) 正員 ○佐藤栄司
 長崎大学工学部 正員 高橋和雄
 パシフィックコンサルタンツ(株) 正員 前田悟雄

1. まえがき

設計できる材料といわれる積層板は、異なる物理的特性を持つ材料を組み合わせることや、配向角を変化させることにより新しい優れた特性を持つ材料が得られる。このため近年、積層板に関する研究は盛んに行われてきたが動的安定特性を取り扱った研究はあまり見受けられない。著者等はこれまでの研究で対称積層した積層長方形板動的安定特性について明かにした。本研究では、引張-せん断カップリング剛性の影響が含まれる非対称積層長方形板の動的安定特性について、面外全周単純支持、面内固定板をモデルとして、異方性の影響、積層数、および配向角の影響を検討し、動的不安定領域を明らかにするものである。

2. 解析方法

x 軸方向に一様分布の静的面内力 N_{x0} と変動面内力 $N_{xt} \cos \Omega t$ が作用する場合を考えると、面内力がなす仕事 $U(w)$ は、

$$U(w) = \frac{1}{2} \rho \int_{-h/2}^{h/2} \iint_A (N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (1)$$

ここに、 ρ : 板密度、 h : 積層板の板厚、 N_{x0} : 静的面内力、 N_{xt} : 変動面内力の振幅、 t : 時間、 Ω : 変動面内力の円振動数。

次に、積層板のたわみおよび回転角を次式のように仮定する¹⁾。

$$\begin{aligned} w(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{W}_{mn}(\xi, \zeta), \quad u_0(\xi, \zeta, t) = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{U}_{mn}(\xi, \zeta), \quad v_0(\xi, \zeta, t) = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{V}_{mn}(\xi, \zeta) \\ \bar{\alpha}(\xi, \zeta, t) &= \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{A}_{mn}(\xi, \zeta), \quad \bar{\beta}(\xi, \zeta, t) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_{mn}(t) \bar{B}_{mn}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\bar{T}$: 時間に関する未知の関数、 $\bar{W}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{U}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{V}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{A}_{mn}(\xi, \zeta)$, $\bar{B}_{mn}(\xi, \zeta)$: 幾何学的境界条件を満足する座標関数で、固有振動解析で得られた固有振動系を用いる。

ここで、運動方程式を誘導するために Hamilton の原理を適用する。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{T - (V - U)\} dt = 0 \quad t = t_1, t_2 \text{ で } \delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0 \quad (3)$$

$$\text{式(3)の変分を行ないまとめると、} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \bar{A}_{mn}^* \bar{T}_{mn} + \left(\frac{1}{\lambda_{v1}^0} \bar{B}_{mn}^{kl} - \frac{\lambda_b^0}{\lambda_{v1}^0{}^4} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \omega t) \bar{C}_{mn}^{kl} \right) \bar{T}_{mn} \right\} = 0 \quad (4)$$

$$\text{ここに、} \bar{A}_{mn}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \{ \bar{U}_{mn} \bar{U}_{kl} + \bar{V}_{mn} \bar{V}_{kl} + \bar{W}_{mn} \bar{W}_{kl} \} d\xi d\zeta, \quad \bar{C}_{mn}^{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} \bar{W}_{mn,\xi} \bar{W}_{kl,\xi} d\xi d\zeta$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{mn}^{kl} &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{A_{11}^*}{\beta^2} \bar{U}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi} + \frac{D_{11}^*}{\beta^2} \bar{A}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \frac{A_{12}^*}{\beta} (\bar{U}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi} + \bar{V}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi}) + \frac{D_{12}^*}{\beta} (\bar{B}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \bar{A}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi}) + D_{22}^* \bar{B}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} \right. \\ &+ A_{22}^* \bar{V}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi} + \frac{D_{16}^*}{\beta^2} (2 \bar{A}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \bar{A}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi}) + D_{66}^* \left(\bar{A}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \frac{1}{\beta} (\bar{A}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi}) + \frac{1}{\beta^2} \bar{B}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} \right) \\ &+ \frac{B_{16}^*}{\beta^2} (\bar{U}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi} + \bar{V}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \bar{A}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi}) + \frac{B_{16}^*}{\beta} (\bar{U}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \bar{A}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi} + \bar{U}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \bar{A}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi}) \\ &+ B_{26}^* (\bar{V}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi} + \bar{A}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi} + \bar{U}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi}) + \frac{B_{26}^*}{\beta} (\bar{V}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi} + \bar{V}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi}) \\ &+ k A_{55}^* \left(\bar{A}_{mn} \bar{A}_{kl} + \frac{1}{\beta} (\bar{A}_{mn} \bar{W}_{kl,\xi} + \bar{W}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl}) + \frac{1}{\beta^2} \bar{W}_{mn,\xi} \bar{W}_{kl,\xi} \right) + A_{66}^* \left(\bar{U}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi} + \frac{1}{\beta} (\bar{U}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi} + \bar{V}_{mn,\xi} \bar{U}_{kl,\xi}) + \frac{1}{\beta^2} \bar{V}_{mn,\xi} \bar{V}_{kl,\xi} \right) \\ &+ D_{26}^* (\bar{A}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{A}_{kl,\xi}) + \frac{D_{26}^*}{\beta} (\bar{B}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi} + \bar{B}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl,\xi}) + k A_{44}^* (\bar{B}_{mn} \bar{B}_{kl} + \bar{B}_{mn} \bar{W}_{kl,\xi} + \bar{W}_{mn,\xi} \bar{B}_{kl} + \bar{W}_{mn,\xi} \bar{W}_{kl,\xi}) \Big\} dA \\ \bar{W}_{mn,\xi}, \bar{W}_{mn,\zeta}, \bar{U}_{mn,\xi}, \bar{U}_{mn,\zeta}, \bar{V}_{mn,\xi}, \bar{V}_{mn,\zeta}, \bar{A}_{mn,\xi}, \bar{A}_{mn,\zeta}, \bar{B}_{mn,\xi}, \bar{B}_{mn,\zeta} : \bar{W}_{mn}, \bar{U}_{mn}, \bar{V}_{mn}, \bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn} \text{ の積分からなる関数。} \end{aligned}$$

$\bar{W}_{kl,\xi}, \bar{W}_{kl,\zeta}, \bar{U}_{kl,\xi}, \bar{U}_{kl,\zeta}, \bar{V}_{kl,\xi}, \bar{V}_{kl,\zeta}, \bar{A}_{kl,\xi}, \bar{A}_{kl,\zeta}, \bar{B}_{kl,\xi}, \bar{B}_{kl,\zeta} : \bar{W}_{kl}, \bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{A}_{kl}, \bar{B}_{kl}$ の積分からなる関数。

ここに、 $\tau = \omega_{11}^0 t$, $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}^0$, $\bar{N}_{x0} = N_{x0} / N_{cr}$, $\bar{N}_{xt} = N_{xt} / N_{cr}$, $\lambda_{v1}^0 = \rho h b^4 \omega_{11}^0{}^2 / D_{11}^0$, $\lambda_b^0 = N_{cr} b^2 / D_{11}^0$
 ω_{11}^0 : $\theta = 0^\circ$ の 1 次の固有振動数、 N_{cr} : 座屈面内力、 D_{11}^0 : $\theta = 0^\circ$ の D_{11} における板剛度。

式(4)を行列表示すると次式が得られる。

$$[A] \left\{ \bar{T} \right\} + [B] \left\{ \bar{T} \right\} + (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) [C] \left\{ \bar{T} \right\} = \{0\} \quad (5)$$

$$\left\{ \bar{T} \right\} = \left\{ \bar{T}_{11}, \bar{T}_{12}, \dots, \bar{T}_{1L}, \bar{T}_{21}, \bar{T}_{22}, \dots, \bar{T}_{2L}, \dots, \bar{T}_{LL} \right\}^T, [A]: A[j+(i-1)L, n+(m-1)L] = \bar{A}_{mn}^{kl} \quad (i, j, m, n, = 1, \dots, L)$$

$$[B]: B[j+(i-1)L, n+(m-1)L] = 1/\lambda_{v1}^0{}^4 \bar{B}_{mn}^{kl}, [C]: C[j+(i-1)L, n+(m-1)L] = -\lambda_b^0 / \lambda_{v1}^0{}^4 \bar{C}_{mn}^{kl}$$

式(5)の一般解を指数関数とフーリエ級数の積で仮定し、調和バランス法により 2 倍サイズの固有値問題に変換して系の安定判別を行う²⁾。

3. 数値結果

図-1 は異方性が大きい材料 GRAPHITE/EP を用いた板厚比 $a/h=10$ の 2 層からなる正方形板の配向角 $\theta = 30^\circ$ の変動面内力を変化させたことによる動的不安定領域の変動を示す。縦軸 $\bar{N}_{xt}$ は、無次元変動面内力、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元励振振動数である。図中では、無次元変動面内力の振幅 $\bar{N}_{xt}$ が 0.5 の時の不安定領域の幅が 0.1 未満の領域は無視しており、上部に記してある ω_{ij} の i, j の値はそれぞれ x 軸方向、 y 軸方向の半波数を表している。非対称積層では主不安定領域のみ発生し、対称積層の時に見られた結合共振による不安定領域は発生しない。これは、非対称配置にすると曲げ-ねじりカップリング剛性が零となるためである。

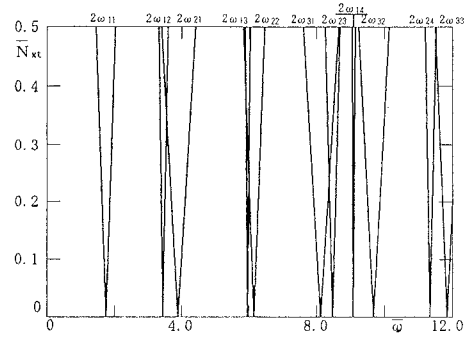


図-1 動的不安定領域

次に図-2 (a), (b) に板厚比 $a/h=10$ の 4 層からなる正方形板の配向角を変化させたことによる動的不安定領域の変動を異方性の異なる 2 種類の材料 ((a) EGLASS/EP, (b) GRAPHITE/EP) で示す。縦軸 $\bar{\omega}$ は無次元励振振動数、横軸 θ は配向角である。変動面内力の振幅には、配向角 $\theta = 0^\circ$ における $\bar{N}_{xt} = 0.5$ の値を用いる。配向角の変化により動的不安定領域は変動し、 x 軸方向の半波数 i が y 軸方向の半波数 j よりも大きい ($i > j$) の不安定領域は、配向角の増加に伴い下降し、不安定領域の幅は増加する。この影響は、(b) に示す異方性の大きな材料で顕著である。

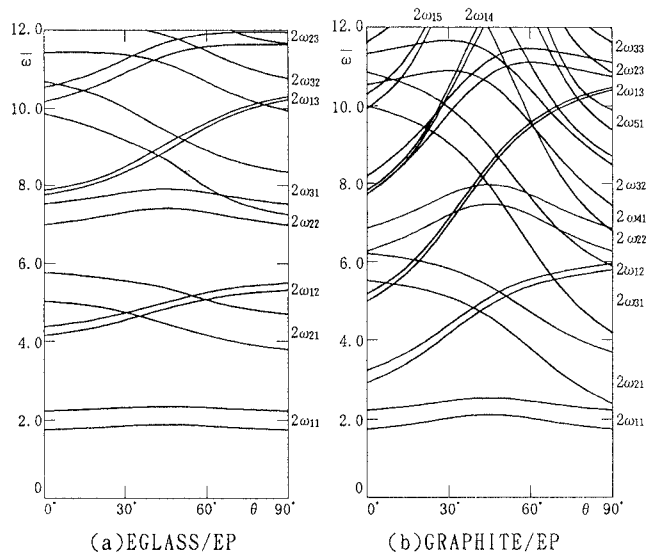


図-2 不安定領域の変動

4. まとめ

配向角の変化により動的不安定領域は変動する。この変動は、 x 軸方向と y 軸方向の半波数が異なる不安定領域において顕著に表われる。積層数および板厚比の影響については講演時に発表する。

参考文献

- (1) J.-L. DOONG AND C.-P. FUNG, Journal of Sound and Vibration, (1988) 125(2), 325-339. VIBRATION AND BUCKLING OF BIMODULUS LAMINATED PLATES ACCORDING TO A HIGHER-ORDER PLATE THEORY.
- (2) 夏秋・高橋・小西, 構造物の動的安定性-そのアプローチと橋梁構造物への応用-, 片山技報, 1988, Vol. 8, 1-9.