土木学会第50回年次学術講演会（平成7年9月）

I -653

D_4不変構造系の線形振動特性

和歌山高専　環境都市工学科　正会員○　有尾　一郎

1.　はじめに

最近の制振技術は，Robust 制御等の制振制御理論の発達にともなってスピルオーバ現象等の不確定性まで定量的に明らかにされつつある．しかし，解析誤差が敏感に影響する大規模固有値計算においては，固有値が重根を含んでいたり，他の固有値に比べ極めて接近しているような数値的不安定要因が発生する恐れがある．本研究は，対称構造物の状態方程式を幾何学的特性に基づいた座標変換を用いることによりブロック対角化を行い，そのような数値的不安定要因を除去するための解析法を提案するものである．また，本手法の長所として，数値計算に用いるシステム行列等の行列サイズを大幅に小さくでき，また，演算コストも低減できることにより，固有値解析の反復計算の収束安定性を向上できる．

2.　状態方程式のブロック対角化

(1)　状態方程式の群同変性

ある N 自由度離散系の時刻 t における線形時不変システム

$$\boldsymbol{F} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{u}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (1)$$

を考える．ここに，A, B, C, Dは入出力および伝達からなるシステム行列を，$\boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{R}^N$と$\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{R}^M$は内部状態の変数ベクトルと入力ベクトルを，さらに，$\boldsymbol{y}(t) \in \boldsymbol{R}^L$は出力ベクトルをそれぞれ表す．本論文では，特に

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dot{\boldsymbol{x}} - A\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad (2)$$

の状態方程式を考えることとする．同様に，出力方程式も$\boldsymbol{x}$について群 G による不変性は保たれる．

状態方程式の対称性を記述するにあたり，幾何学的変換を表す元 g から構成される群 G を考える．例えば群 G の元 g が N 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ に作用すると，$\boldsymbol{x}(t)$ が $g(\boldsymbol{x}(t))$ に変換されるとする．この座標変換の仕組みを表す $N \times N$ の表現行列 $T(g)$ とは

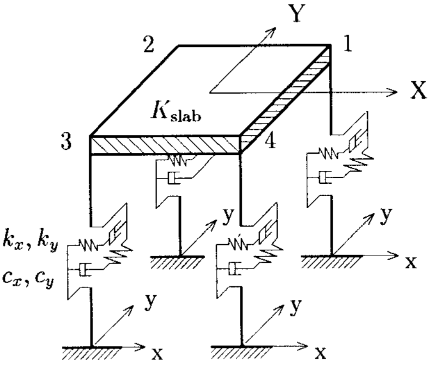


図-1　D_4不変な構造モデル

$$T(g)\boldsymbol{x}(t) = g(\boldsymbol{x}(t)), \quad {}^\forall g \in D_n \quad (3)$$

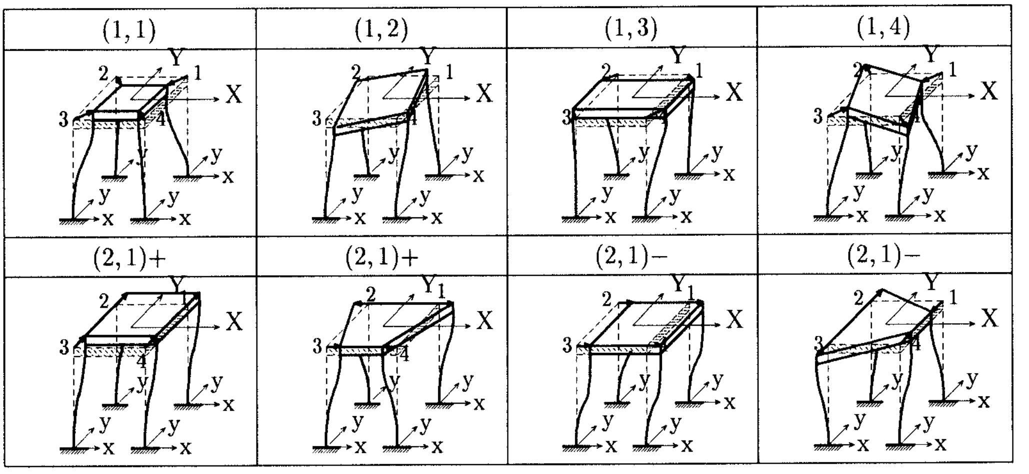
を満たすものである．この論文では$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{u}$は同一の空間に存在するとしているので，入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ の表現行列も同一である．

この系の対称性は，群 G の元 g が引き起こす座標変換 $T(g)$ に対する，状態方程式 $\boldsymbol{F}$ の不変性（群 G 不変性）

$$T(g)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}(T(g)\boldsymbol{x}, \hat{T}(g)\boldsymbol{u}), \quad {}^\forall g \in D_n (4)$$

という状態方程式$\boldsymbol{F}$の同変条件式が求まる[1]．条件式 (4) は幾何学的対称条件を一般化したものであり，変数 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ をそれぞれ $T(g)$ により変換することと，式 $\boldsymbol{F}$ 全体を $T(g)$ で変換することが等価であることを表す．式 (4) を，式 (2) を用いて書き下すと，

[1] 一般には$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{u}$の次元が異なるので，その表現行列 $T(g), \hat{T}(g)$ の次元も異なる．



図− 2　D_4不変振動モード (XY方向成分)

$$T(g)(\dot{\boldsymbol{x}} - A\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{u}) =$$
$$T(g)\dot{\boldsymbol{x}} - AT(g)\boldsymbol{x} - \hat{T}(g)(B\boldsymbol{u}), \quad {}^{\forall}g \in D_n \quad (5)$$

となる．この式が全ての$\boldsymbol{x}$について成立することから，

$$T(g)A = AT(g), \quad {}^{\forall}g \in D_n \quad (6)$$

という条件が求まる．これは行列 A が，ある座標変換行列によりブロック対角化可能であることを示している [1]．

3.　既約分解後の固有値解析

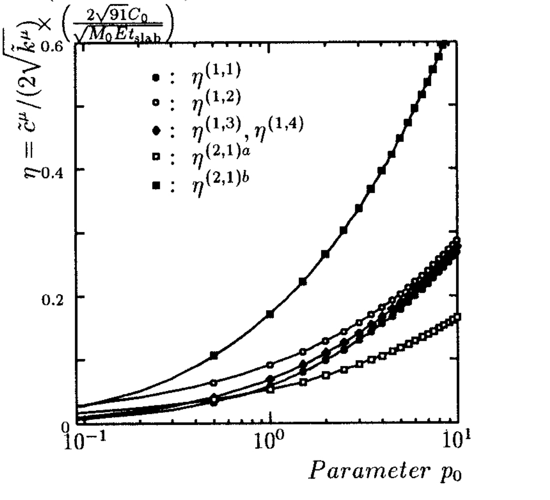
一般化座標$\dot{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_i$を利用すると状態方程式は

$$\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -K/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{Bmatrix} - B\boldsymbol{u}$$

と与えられる．固有値は $|s\mathrm{I} - A| = 0$ により求められるが，既約分解後の $|s\mathrm{I} - \tilde{A}^{\mu}| = 0$ を利用すると簡潔に解を求められる [2]．

4.　解析結果と考察

図–1に示される D_4不変構造の線形振動特性は幾何学的条件が強く起因していることを示す．4本の柱はフレキシブル構造を，slab は弾性面内変位問題とし，本モデルは slab の剛度一定のもとで柱の剛度比 p_0と減衰 Cを増減変化させたとき，各既約表現毎 (**図–2**参照) に対して減衰比の推移を**図–3**に示す．モード解析はブロック対角化後に行っているので，幾何学的構造から誘発される各振動モードは完全に分解され，解を遺漏なく全て見つけだしている．$\mu = (1,2),(2,1)a\pm$は slab が剛の剛体変位の挙動に対応する．このことは slab の減衰が全く望めないことが言える．これに対し，$\mu = (2,1)b\pm$の減衰比曲線はこの系に対する振動の減衰性能は他の振動モードより高い．また，８つの振動モードが p_0の増加に伴って減衰比が３つに収斂していくことが分かる．



図− 3　D_4不変 p_0と Cの線形増加に伴う減衰比の比較

参考文献

1) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K. : Block-diagonali-zation method for symmetric structures with rotational displacements, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, No.483/I-27, pp.27-36, 1994.
2) Ario, I., Ikeda, K. and Torii, K. : Block-diagonalization method for dynamic problems of damped symmetric structures, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, 1995.