

埼玉大学工学部 正会員 茂木秀則
 埼玉大学工学部 正会員 川上英二

1. はじめに

マイクロゾーニングなど広範囲で地盤特性の分布を推定するために、常時微動を用いた簡便な推定方法が広く行われている。この目的には、常時微動の堆積層上/露頭岩盤上のスペクトル比と水平動/上下動のスペクトル比(QTスペクトル)の2つがよく用いられる。

ところで、常時微動のような定常確率過程のスペクトル推定値は確率変数であり、確率分布に基づく誤差理論が展開されている(e.g. 日野 1977)。そして、スペクトル比においても同様な検討が必要であろう。このことから、本研究ではパワースペクトル比の確率分布について解析的手法に実測結果を交えて検討を加えた。

2. パワースペクトルの確率分布

常時微動は定常確率ガウス過程として理想化することができる(星谷 1974, 日野 1977)。

$$v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) \quad (1)$$

ここで、 ω_j は角振動数の第 j 成分、フーリエ係数 A_j, B_j は正規分布に従う互いに独立な確率変数である。従って、式(1)で表される時刻歴波形のパワースペクトル s_j は次式で表される。

$$E \left[\frac{A_j^2 + B_j^2}{2} \right] = s_j \Delta \omega \quad (2)$$

ここで、 E はアンサンブル平均をとることを意味する。

式(2)で表されるように、パワースペクトルは2つのフーリエ係数の2乗和であるから、 k 個のサンプルのアンサンブル平均として推定したパワースペクトルは $2k$ 自由度の χ^2 分布に従う確率変数である。サンプル数 k ($2k$ 自由度)、期待値 μ の χ^2 分布の確率密度関数は次式で表される。

$$f_X(x) = \frac{k^k}{\mu^k \Gamma(k)} x^{k-1} \exp(-kx/\mu) \quad (3)$$

ここで、 X はパワースペクトルの値である。また、この分散は $\sigma^2 = \mu^2/k$ で表される。

3. パワースペクトル比の確率分布

確率変数 X, Y が独立で、式(3)の確率密度関数で表されるとき、その比 $U = Y/X$ は F 分布に従い、確率密度関数は次式で表される。

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(k_X + k_Y) k_X^{k_X} k_Y^{k_Y} \mu_X^{k_Y} \mu_Y^{k_X}}{\Gamma(k_X) \Gamma(k_Y)} \frac{u^{k_Y-1}}{(k_X \mu_Y + k_Y \mu_X u)^{k_X + k_Y}} \quad (4)$$

ここで、添字 X, Y は分母、分子になる確率変数を示す。確率密度が式(4)で表されるとき、期待値 μ_U 、分散 σ_U^2 (μ_U 周り)、 $\sigma_{Y/X}^2$ (μ_Y/μ_X 周り)、確率分布関数 F_U はそれぞれ次式で与えられる。

$$\mu_U = \frac{\mu_Y}{\mu_X} \cdot \frac{k_X}{k_X - 1} \quad (5)$$

$$\sigma_U^2 = \frac{\mu_Y^2}{\mu_X^2} \cdot \frac{k_X^2 (k_X + k_Y - 1)}{k_Y (k_X - 1)^2 (k_X - 2)} \quad (6)$$

$$\sigma_{Y/X}^2 = \frac{\mu_Y^2}{\mu_X^2} \cdot \frac{k_X^2 + k_X k_Y + 2k_Y}{k_Y (k_X - 1) (k_X - 2)} \quad (7)$$

$$F_U(u) = \frac{\Gamma(k_X + k_Y)}{\Gamma(k_X) \Gamma(k_Y)} \cdot \sum_{r=0}^{k_Y-1} \frac{(-1)^r k_Y - 1}{k_X + r} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{k_Y \mu_X}{k_X \mu_Y} u \right)^{-k_X - r} \right\} \quad (8)$$

図1、図2はそれぞれ、分母のサンプル数 k_X に対する期待値 μ_U と分散 σ_U^2 を示したものである。期待値は分母のサンプル数が増えるにつれて μ_Y/μ_X に収束する。分散 σ_U^2 は分子と分母両方のサンプル数に依存し、分母のサンプル数が増えるにつれて、 $1/k_Y \cdot \mu_Y^2/\mu_X^2$ に収束する。

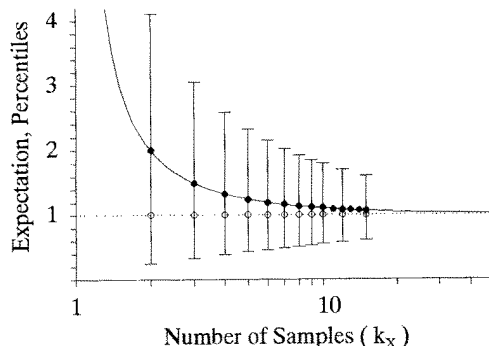


図1. 期待値 μ_U (黒丸) と 10, 50 (白丸), 90% 位値

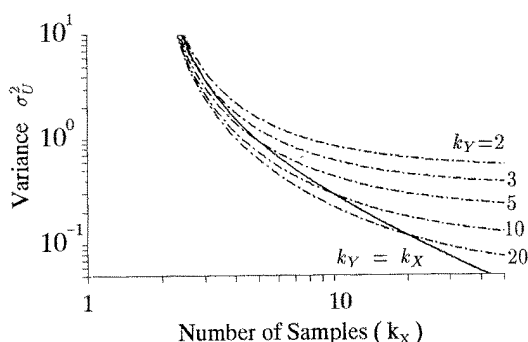


図2. μ_U 周りの分散

表 1. スペクトル比の期待値、分散、%位値 ($\mu_X = \mu_Y = 1, k_X = k_Y$)

サンプル数 $k_X = k_Y$	期待値 μ_U	分散 σ_U^2	%位値						
			5%	10%	20%	50%	80%	90%	95%
2	2.000000	∞	0.156538	0.243472	0.402801	1.000000	2.482613	4.107250	6.388233
3	1.500000	3.750000	0.233434	0.327380	0.484997	1.000000	2.061869	3.054551	4.283866
4	1.333333	1.555556	0.290858	0.386197	0.538683	1.000000	1.856379	2.589349	3.438101
5	1.250000	0.937500	0.335769	0.430551	0.577502	1.000000	1.731595	2.322604	2.978237
6	1.200000	0.660000	0.372213	0.465671	0.607368	1.000000	1.646447	2.147437	2.686637
7	1.166667	0.505556	0.402621	0.494454	0.631328	1.000000	1.583963	2.022434	2.483726
8	1.142857	0.408163	0.428544	0.518651	0.651137	1.000000	1.535775	1.928079	2.333484
9	1.125000	0.341518	0.451020	0.539397	0.667892	1.000000	1.497247	1.853923	2.217197
10	1.111111	0.293210	0.470775	0.557462	0.682320	1.000000	1.465588	1.793843	2.124155
12	1.090909	0.228099	0.504093	0.587594	0.706063	1.000000	1.416303	1.701854	1.983760

また、%位値は式 (8) を数值的に解くことで表 1 のようになる。

以上のことから、興味深い点として次のことが挙げられる。

- (1) スペクトル比の期待値は常に真値 μ_Y/μ_X よりも大きい、分母のスペクトルのサンプル数を十分大きくすることで真値に収束する。
- (2) スペクトル比の変動係数はパワースペクトルのそれよりも大きい。
- (3) (1) の期待値の場合と異なり、表 1 で示されるように中央値は真値 μ_Y/μ_X に等しくなる。

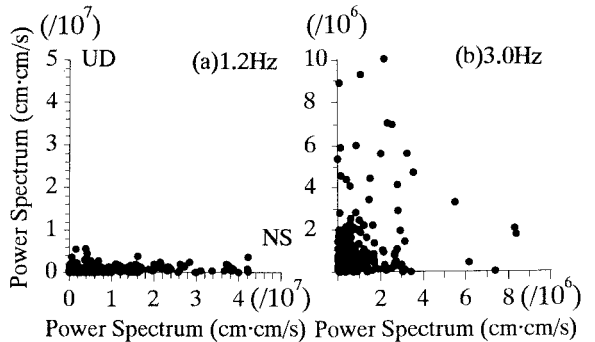


図 4. NS 成分と UD 成分の分布

4. 常時微動測定による検討

用いた常時微動記録は埼玉大学グラウンドにおける、午前 5:30 から午前 8:45 の間の 236 記録である。そして、観測した QT スペクトルと柱状図から、この地点では SH 波の固有振動数が 1.2Hz であること、また、パワースペクトルとレーリー波のエアリー相から 3Hz 前後でレーリー波が卓越していることを確かめた。

図 3 は各サンプル (NS 成分) の 1.2Hz でのパワースペクトル値 ($k=1$) の分布を示したものである。このパワースペクトルの発生頻度は、観測値から求めた期待値を式 (3) に代入して求めた理論密度関数 (鎖線) と比較的一致している。ただし、この計算例の場合、観測値の分散は理論値よりも若干大きい値になった。

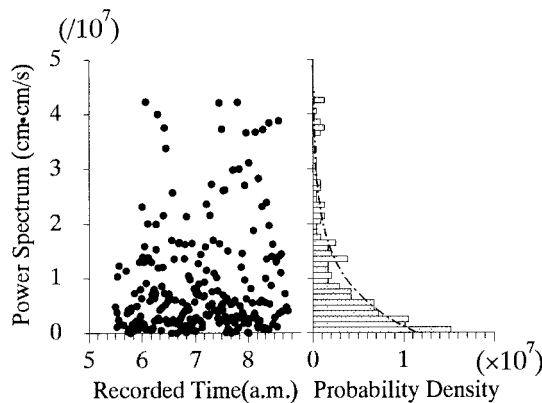


図 3. パワースペクトルの分布 (NS 成分)

QT スペクトルの場合、比をとる 2 つの成分は同時に測定されたものであるため、3 節で仮定した 2 成分の独立性は必ずしも明らかではない。このため、この点についても実測結果を用いて検討した。図 4 は (a) 1.2Hz、(b) 3.0Hz での上下動と水平動のパワースペクトル値の分布を示したものである。両図で相関係数は 0.162 (1.2Hz)、0.150 (3.0Hz) となり、2 成分はほぼ独立であることが確かめられた。

5. まとめ

パワースペクトル比の確率密度関数、期待値、分散の理論解を示し、常時微動測定を用いてこれらの結果に検討を加えた。その結果次のことが指摘できる。

- (1) スペクトル比の期待値は分母のサンプル数に依存し、かつ真値 μ_Y/μ_X よりも常に大きくなる。
- (2) スペクトル比の変動係数はパワースペクトルのそれよりも大きく、パワースペクトルを推定する場合以上に分散に対して注意が必要である。
- (3) 以上のことから、スペクトル比に基づく研究結果を比較する場合には、用いたデータのサンプル数などの条件を両者で合わせておくことが望ましい。

謝辞

常時微動測定に際して東京工業大学総合理工学研究科大町達大教授、年嶋巧助教授にご協力いただいた。記して謝意を表する。

参考文献

- 日野 (1977)、スペクトル解析、朝倉書店
 星谷 (1974)、確率論手法による振動解析、鹿島出版会
 Nakamura Y. (1989) A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *QR of RTRI*, 30, 1, pp. 25-33.