土木学会第50回年次学術講演会（平成7年9月）

I －645

Intrinsic Random Fieldの条件付シミュレーション

攻玉社工科短期大学　正員　山本欣弥
武蔵工業大学　　　　正員　星谷　勝

1．はじめに

確率場Z(X)；X=ベクトル において，N箇所でサンプル実現値 $Z(Xi)$ ；ｉ＝1～N が観測されている。対象とする確率場（ Intrinsic Random Field ）を次のように定義する。1)確率場の期待値は座標関数として(1)式のように表すことができるが，その値は未知である。2)期待値を確率場Z(X)から除いたW(X)のバリオグラム（Variogram）はサンプル実現値 $W(Xi)$；ｉ＝1～N より推定可能である。さらに，バリオグラムは2点間の距離のみに依存する偶関数である。

$$E[Z(X)]=\sum_{j=1}^{p}\beta_j f_j(X) \qquad , \ f_j(X)\text{；座標関数} \tag{1}$$

このとき，N箇所の観測点以外の非観測点 Xr でのサンプル実現値 $Z(Xr)$ を既知の $Z(Xi)$ の線形補間式として予測することを試みる。ただし，Xr が観測点 Xi のいずれかに一致するときは，$Z(Xr)$ は既知のサンプル実現値と一致することが条件となる。従来の方法によると，非観測点の最適推定値 $\hat{Z}(Xr)$ および非観測点でのサンプル実現値 $Z(Xr)$ はそれぞれ(2), (3)式で与えられる。

$$\hat{Z}(Xr)=\lambda_0(Xr)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)Z(Xi) \qquad , \ \lambda_0(Xr),\lambda_i(Xr)\text{；未知係数}\quad , \ Xr\text{；任意の空間座標} \tag{2}$$

$$Z(Xr)=\hat{Z}(Xr)+\varepsilon(Xr) \qquad , \ \varepsilon(Xr)\text{；誤差項} \tag{3}$$

非観測点の最適推定値 $\hat{Z}(Xr)$ を求め，$\varepsilon(Xr)$ をシミュレートすることにより $Z(Xr)$ は求められる。しかし，平均場非均一のため $\hat{Z}(Xr)$ と $\varepsilon(Xr)$ は直行性を持たない。そのため，$\varepsilon(Xr)$ をシミュレートすることは非常な困難を伴う。そこで，Z(X)を(1)式の期待値と変動を表すW(X)の和として(4)式で表現する。このとき，自動的に $E[W(X)]=0$ となる。

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{p}\beta_j f_j(X)+W(X) \tag{4}$$

つまり，$Z(Xr)$ を求めるには，まずZ(X)の期待値を求め，次に $W(Xr)$ を求めればよいこととなる。

2．確率場の期待値の推定

N箇所で観測されたサンプル実現値 Z(Xi) ；ｉ＝1～Nより重回帰分析法を用いて，Z(X)の期待値の推定を行う。サンプル実現値 Z(Xi) と $E[Z(Xi)]=\sum_{j=1}^{p}\beta_j f_j(Xi)$ の残差平方和を最小とする β_j を計算する。このとき，分散値について場の性質を損なわず，かつ容易にその影響を考慮するためには，次の二つの方法が考えられる。第一は，各空間座標間での分散値の差が比較的小さいものと仮定して，分散値を一定として計算を行う方法である。第二は，各空間座標において分散値は一定ではないが，変動係数は一定としてする方法である。後者では，分散値の大きさを考慮して期待値の計算を行う重み付重回帰分析法を用いる。ここでは，重み係数に分散値と比例関係にあると仮定した期待値の逆数を用いている。それぞれの残差平方和Δ^2は，次式で表される。

$$\Delta^2=\sum_{i=1}^{N}\{Z(Xi)-\sum_{j=1}^{p}\beta_j f_j(Xi)\}^2 \tag{5}$$

$$\Delta^2=\sum_{i=1}^{N}w'\{Z(Xi)-\sum_{j=1}^{p}\beta_j f_j(Xi)\}^2 \qquad , \ w'\text{；重み係数}\quad w'=1/E[Z(Xi)]^2 \tag{6}$$

(5)式または(6)式より $\dfrac{\partial\Delta^2}{\partial\beta_l}=0$ となる β_l，$l=1\sim p$ を求めることができる。

3．$W(Xr)$ の最適推定および条件付シミュレーション

線形不偏最小誤差推定を行うが，W(X)は平均値＝０のガウス場なので線形推定式を用いて最適推定$\hat{W}(Xr)$は，次式で表される。

$$\hat{W}(Xr)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)W(Xi) \quad , \lambda_i(Xr)\text{；未知係数}\quad , Xr\text{；任意の空間座標} \tag{7}$$

また，$W(Xr)$は，最適推定値$\hat{W}(Xr)$と誤差項$\varepsilon(Xr)$の和によって表現できるものとする。

$$W(Xr)=\hat{W}(Xr)+\varepsilon(Xr) \tag{8}$$

$W(Xr)$との誤差分散値 $\sigma^2_{(\varepsilon(Xr))}=E[\{W(Xr)-\hat{W}(Xr)\}^2]$ を最小にするように$\lambda_i(Xr)$を求める。$\partial\sigma^2_{(\varepsilon(Xr))}/\partial\lambda_l=0$，$l=1\sim N$より次式の関係が得られる。

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)\{\gamma_{il}-\frac{1}{2}\sigma^2_{(W(Xi))}-\frac{1}{2}\sigma^2_{(W(Xl))}\}=\gamma_{rl}-\frac{1}{2}\sigma^2_{(W(Xr))}-\frac{1}{2}\sigma^2_{(W(Xl))} \quad , l=1\sim N \tag{9}$$

ここで，γ_{ij}は，W(X)のバリオグラムで，$\gamma_{ij}=\frac{1}{2}Var(W(Xi)-W(Xj))=\frac{1}{2}E[\{W(Xi)-W(Xj)\}^2]$により表される。また，$\sigma^2_{(W(Xi))}$は，空間座標でのW(X)の分散である。(4)式よりW(X)とZ(X)の分散は等しいため，Z(X)の期待値を推定するときに用いた仮定に基づき，各空間座標での分散$\sigma^2_{(W(X))}$を求めることができる。

(9)式を解くことにより$\lambda_i(Xr)$が求まる。(9)式が成り立つとき，誤差分散値は次式となる。

$$\sigma^2_{(\varepsilon(Xr))}=\sigma^2_{(W(Xr))}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)\sigma^2_{(W(Xr))}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)\sigma^2_{(W(Xi))}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)\gamma_{ir} \tag{10}$$

(9)式より，$\lambda_i(Xr)=1$；$i=r$および$\lambda_i(Xr)=0$；$i\neq r$となる。このとき，(10)式より，$i=r$で$\sigma^2_{(\varepsilon(Xi))}=0$となり，既観測点において$W(Xr)$は既知のサンプル実現値と一致することがわかる。

参考文献 1)より，(11)，(12)式の関係が成り立ち，$\varepsilon(Xr)$は$\hat{W}(Xr)$および$W(Xi)$と無相関である。

$$W[\hat{W}(Xr)\varepsilon(Xr)]=0 \tag{11}$$

$$W[W(Xi)\varepsilon(Xr)]=0 \tag{12}$$

次に，$\varepsilon(Xr)$と$\varepsilon(Xs)$，Xr,Xs；任意の空間座標 の関係を調べると(14)式となる。

$$W[\varepsilon(Xr)\varepsilon(Xs)]=\frac{1}{2}(\sigma^2_{(W(Xr))}+\sigma^2_{(W(Xs))})-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)\{\frac{1}{2}(\sigma^2_{(W(Xr))}+\sigma^2_{(W(Xi))})\}$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(Xr)\gamma_{ri}-\gamma_{rs} \tag{13}$$

よって，$\varepsilon(Xr)$は，(13)式を満足するようにシミュレートすればよい。あるいは，期待値$E[\varepsilon(Xr)]=0$および(10)式の分散値を有する$\varepsilon(Xr)$をシミュレートすればよいため，著者の一人が提案した漸次拡張方式により，複数点のシミュレートが可能となる。

４．おわりに

以上，期待値が未知ではあるが座標関数により表すことができ，かつ，観測値から場の特性を表すことのできるバリオグラムが推定可能な Intrinsic Random Field における条件付シミュレーション手法について述べた。

最後に，星谷および山本が共同で理論の検討を行った。

参考文献

1)星谷勝，条件付確率場のシミュレーション理論，土木学会論文集No.459／Ｉ-22，pp.113~118，1993.1
2)星谷勝，桑名智英，条件付確率場のシミュレーション理論の検証，土木学会論文集No.477／Ｉ-25，pp.93~96，1993.10
3)J.P.Delhomme，Kriging in the Hydrosciences，Advances in Water Resorces Vol.1，No.5，1978
4)G.Bastin，M.Gevers，Identification and Optimal Estimation of Random Fields from Scattered Point-wise Data，Automatica，Vol.21，No.2，pp.139~155，1985
5)Alfredo H-S.Ang，Wilson H.Tang，土木建築のための確率・統計の基礎，伊藤学，亀田弘行訳，丸善株式会社