I －551

弾性地盤上に置かれた棒の衝撃応答

鉄建建設（株）　正会員　石崎太郎
長岡技術科学大学　正会員　岩崎英治
長岡技術科学大学　正会員　林　正

1. まえがき

土木構造物は，言うまでもなくすべて，地盤上に建設される．しかし，このような構造物が，外力を受けたときの応力状態を解析するときには，地盤を剛体と考え，構造物の支持条件には，固定支持を仮定することが多い．このような場合には，構造物内から地盤に向かう応力波は，地盤との境界面で，同位相の波が全反射する．しかし，実際には，地盤も変形し，一部の応力波は構造物内から地盤に散逸し，構造物内の応力波は減衰する．本報告では，単純化して，地盤上に置かれた棒の上端に衝撃荷重が作用したときの棒内の応力波の伝播挙動を，地盤を半無限弾性体，棒を弾性棒として調べる．このとき，3 次元軸対称問題と，2 次元平面ひずみ問題で扱ったときの両者の違いも示す．

2. 解の誘導

図 1 のように，半無限弾性体の上におかれた弾性棒の上端に荷重 p が作用しているものとする．弾性棒のヤング係数を E_b，密度を ρ_b，半無限弾性体のラメの定数を λ，μ，密度を ρ とする．また，弾性棒の z 軸方向変位を u_{zb}，応力を σ_{zb}，半無限弾性体の z 軸方向変位を u_{ze}，応力を σ_{ze}，また，r–z 面内のせん断応力を σ_{zre} とする．

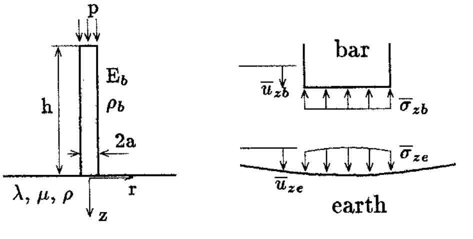


図 1 弾性地盤上に置かれた棒

(1) 弾性棒

弾性棒は，1 次元部材として扱い，次の運動方程式を考える．

$$E_b\frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z^2} = \rho_b\frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial t^2}$$

上式を時間についてラプラス変換し，上端に単位面積当たり大きさ p の荷重が作用し，下端の変位を $\overline{u}_{zb}$ とする境界条件のもとで解き，下端の応力 $\overline{\sigma}^s_{zb}$ を求めると，次のようになる．

$$\overline{\sigma}^s_{zb} = \frac{-p^s + \beta E_b \overline{u}^s_{zb}\sinh(\beta h)}{\cosh(\beta h)} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに，右肩添字 s の付いた諸量は，時間に関してラプラス変換されていることを表している．また，β は，$\beta^2 \equiv \rho_b s^2/E_b$ である．

(2) 半無限弾性体

時間についてラプラス変換した，軸対称半無限弾性体の一般解[1]から，地表面 (z=0) での応力 σ^s_{ze}，σ^s_{zre} と変位 u^s_{ze} を求めると，次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^s_{ze} = \displaystyle\int_0^\infty [(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)A - 2\mu\lambda_2\xi^2 B]\mathrm{J}_0(\xi r)d\xi\,, \quad u^s_{ze} = \int_0^\infty (-\lambda_1 A + \xi^2 B)\mathrm{J}_0(\xi r)d\xi \\ \sigma^s_{zre} = \displaystyle\int_0^\infty [2\mu\lambda_1 A - (\rho s^2 + 2\mu\xi^2)B]\xi\mathrm{J}_1(\xi r)d\xi\,, \quad \lambda_1^2 \equiv \xi^2 + \frac{\rho s^2}{\lambda + 2\mu}\,, \quad \lambda_2^2 \equiv \xi^2 + \frac{\rho s^2}{\mu} \end{array}\right\} \cdots\cdots (2)$$

ここに，A, B は積分定数，$\mathrm{J}_0(\xi r)$, $\mathrm{J}_1(\xi r)$ は，それぞれ 0 次と 1 次の第 1 種 Bessel 関数である．

地表面での z 方向応力 σ_{ze} は，半径 $r < a$ では，$\overline{\sigma}_{ze}$ に等しく，$r > a$ ではゼロ，また，r–z 面内のせん断応力もゼロでなければならない．これらの境界条件より積分定数 A と B が次のように求められる．

$$A = \frac{(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)\xi}{(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)^2 - (2\mu\xi)^2\lambda_1\lambda_2}\overline{\Sigma}^s_{ze}\,, \quad B = \frac{2\mu\lambda_1\xi}{(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)^2 - (2\mu\xi)^2\lambda_1\lambda_2}\overline{\Sigma}^s_{ze}$$

ここに，$\overline{\Sigma}^s_{ze}$ は次式で与えられる．

$$\overline{\Sigma}^s_{ze} \equiv \int_0^a \overline{\sigma}^s_{ze}\mathrm{J}_0(\xi r)r\,dr$$

これらより，地表面の z 方向変位 u^s_{ze} は，次のようになる．

$$u^s_{ze} = \int_0^\infty \frac{-\rho s^2 \lambda_1 \xi}{(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)^2 - (2\mu\xi)^2\lambda_1\lambda_2} \overline{\Sigma}^s_{ze} \mathrm{J}_0(\xi r) d\xi \quad \cdots\cdots (3)$$

(3) 弾性棒と半無限弾性体の結合

弾性棒の下端の変位と応力は，棒を1次元部材として扱っているために，r 方向に一定の値をとる．しかし，半無限弾性体の地表面の変位と応力は，r の関数として表されている．そこで，接合面の応力 $\overline{\sigma}^s_{ze}$ が r に関して一定な値をとるものとして扱い，さらにこの応力が接合面の棒の応力 $\overline{\sigma}^s_{zb}$ に等しいものと仮定する．これより，$\overline{\Sigma}^s_{ze} = \overline{\sigma}^s_{zb} a^2 \mathrm{J}_1(\xi a)/(\xi a)$ となる．また，接合面の変位 u^s_{ze} は，$r < a$ の範囲での平均 $\overline{u}^s_{ze}$ が，棒の変位 $\overline{u}^s_{zb}$ に等しいものと仮定する．ここに，平均変位は $\overline{u}^s_{ze} \equiv (1/\pi a^2)\int_0^a u^s_{ze} 2\pi r dr$ で表される．この式に，式(3)を代入すると，

$$\overline{u}^s_{ze} = \overline{\sigma}^s_{zb} D^s , \qquad D^s \equiv 2a^2 \int_0^\infty \frac{-\rho s^2 \lambda_1 \xi}{(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)^2 - (2\mu\xi)^2\lambda_1\lambda_2} \left(\frac{\mathrm{J}_1(\xi a)}{\xi a}\right)^2 d\xi$$

上式の $\overline{u}^s_{ze}$ が，式(1)に含まれる $\overline{u}^s_{zb}$ に等しいことより，接合面の変位は，次のように求められる．

$$\overline{u}^s_{zb} = \frac{-p^s D^s}{\cosh(\beta h) - D^s \beta E_b \sinh(\beta h)} \quad \cdots\cdots (4)$$

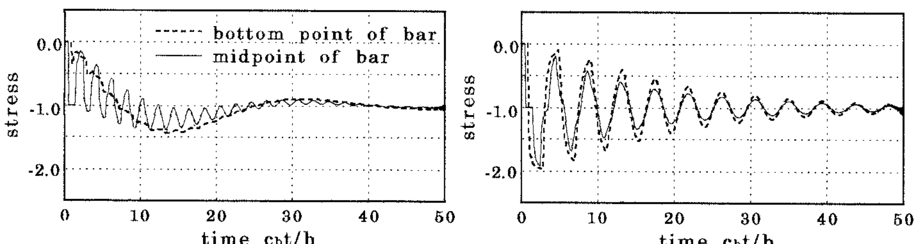
これを，式(1)に代入すると，接合面での応力 $\overline{\sigma}^s_{zb}$ も求められる．また，これらより，弾性棒内と，半無限弾性体内の変位と応力が求められる．

(4) 2次元半無限弾性体の場合

半無限弾性体を，2次元半無限弾性体とした場合の接合面（辺）の変位 $\overline{u}^s_{zb}$ は，式(4)に含まれる D^s に，次式を用いた式で表される．

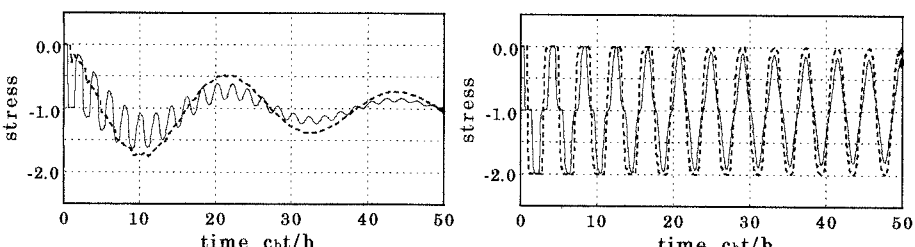
$$D^s \equiv \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{-\rho s^2 \lambda_1}{(\rho s^2 + 2\mu\xi^2)^2 - (2\mu\xi)^2\lambda_1\lambda_2} \left(\frac{\sin(\xi a)}{\xi a}\right)^2 d\xi$$

3. 計算例



(a) ρ=1800kg/m^3, c_1=860m/s, c_2=160m/s　(b) ρ=2500kg/m^3, c_1=4990m/s, c_2=2800m/s

図2 2次元平面ひずみの場合



(a) ρ=1800kg/m^3, c_1=860m/s, c_2=160m/s　(b) ρ=2500kg/m^3, c_1=4990m/s, c_2=2800m/s

図3 3次元軸対称の場合

図-2と3に，それぞれ2次元平面ひずみ問題として扱った場合と，3次元軸対称問題として扱った場合の棒の中央と下端の応力を示す．これらの図で横軸は，縦波が棒の上端から下端まで伝播する時間 h/c_b で正規化している．また，棒の諸元は，h=5m, a=0.25m, E_b=25GPa, ρ_b=2400kg/m^3，半無限弾性体の諸元は図示の通りである．なお，c_1, c_2 はそれぞれ縦波（膨張波）と横波（せん断波）の伝播速度である．

参考文献

1) Eringen,A.C. and Suhubi,E.S. : *Elastodynamics*, Vol.II, Academic Press, 1975.