

武蔵工業大学 正会員 丸山 収

1. はじめに

ガウシ性の確率場を仮定し、平均値、相互相関関数(相互スペクトル密度関数)および任意観測点におけるサンプル実現値が与えられている場合に、非観測点における条件付確率場を推定する試みが行われている。これらの研究では、非観測点のサンプル実現値を観測値に関する線形多項式関係にモデル化し、多項式の重み係数を、ガウシ性確率場の性質を満足するように決定している。重み係数の決定法には、最小誤差分散推定、Kriging法および最尤法等があるが、これらの手法により求められる結果は、ガウシ性確率場のもとで、同一の理論解を与える¹⁾。

一方、確率場の性質が非ガウシ性として与えられる場合には、確率場の性質が単に相互相関関数等の確率2次モーメントのみで規定されるものとは異なり、条件付の非ガウシ性確率場の推定理論を一般的に構築することは困難な問題となる。そこで、非ガウシ性確率場を等価なガウシ性確率場に変換する²⁾、非ガウシ性確率場が、ガウシ性確率場の非線形な関係式にモデル化³⁾される場合についての推定理論が構築されている。本研究では、非ガウシ性確率場の条件付補間において、非観測点の確率場を観測値に関する線形関係式としてモデル化し、非観測点と観測点の関係を与える重み係数を、非ガウシ性確率場の3次確率モーメントにより決定する手法を示している。

2. 確率モーメントとキュムラント⁴⁾

確率場: $Z(X)$ の平均値: $E[Z(X)] = 0$ とすると n 次確率モーメント: M_n は次式で与えられる。

$$M_n[X_1, X_2, \dots, X_n] = \int \dots \int E[Z(X_1), Z(X_2), \dots, Z(X_n)] \\ = \int \dots \int Z(X_1), Z(X_2), \dots, Z(X_n) * P(Z(X_1), Z(X_2), \dots, Z(X_n)) dZ(X_1) \dots dZ(X_n) \quad (1)$$

ここで、 X : 確率場の座標ベクトル、 $P(\cdot)$: 確率密度関数である。仮に、 $Z(X)$ がガウシ性の確率場とすると、平均値0または平均値まわりの確率モーメントのうち、3次以上の奇数次のモーメントは0となり、4次以上の偶数次の確率モーメントは、2次確率モーメント: M_2 のべき乗として与えられる。このことは、ガウシ性の確率場のあらゆる性質は、平均値および相互相関関数により表現されることを示している。また確率密度関数の関数系が陽の形で与えられれば、確率密度関数のフーリエ変換により得られる特性関数から、 n 次確率モーメントは容易に求められる。また、確率密度関数の分布形を具体的に求めることが出来なければ、蓄積された観測データから直接モーメント関数を求めることとなる。

モーメント関数に類似的統計量として、キュムラント関数: $C_n(\cdot)$ がある。キュムラント関数は、特性関数の対数をテーラー展開することで求めることができる。例えば定常の確率場を考え、4次までの確率モーメントとキュムラント関数の関係を示すと以下ようになる。

$$E[Z(X_1)Z(X_1+\tau_1)] = M_2(\tau_1) = C_2(\tau_1) \\ E[Z(X_1)Z(X_1+\tau_1)Z(X_1+\tau_2)] = M_3(\tau_1, \tau_2) = C_3(\tau_1, \tau_2) \\ E[Z(X_1)Z(X_1+\tau_1)Z(X_1+\tau_2)Z(X_1+\tau_3)] = M_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad (2) \\ = C_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + C_2(\tau_1)C_2(\tau_3-\tau_2) + C_2(\tau_2)C_2(\tau_3-\tau_1) + C_2(\tau_3)C_2(\tau_2-\tau_1)$$

式(2)より、2次および3次キュムラント関数は、それぞれ2次および3次確率モーメント関数に等しく、4次モーメント関数は、2次および4次のキュムラント関数により求められることが分かる。特に確率場: $Z(X)$ が、ガウシ性定常確率場であれば、3次以上のキュムラント関数は、恒等的に0となる。ガウシ性および非ガウシ性確率場の対応関係は、3次以上のキュムラントにより明確にすることが可能である。しかしながら、以下に述べる理論とは別に、高次モーメント特性を数少ない観測データから、いかに精度良く規定するかということは重要な問題である。

3. 自己回帰モデル

非観測点の確率場の推定値を求めるために次式を仮定する⁴⁾。

$$Z(X_r) = \sum \lambda_i Z(X_i)^{(k)} + \varepsilon(X_r) \quad (a) \\ \hat{Z}(X_r) = \sum \lambda_i Z(X_i) \quad (b) \quad (3)$$

ここで $\varepsilon(X_r)$: 推定誤差、 $Z(X_i)$: 観測点におけるサンプル実現値である。確率場: $Z(X)$ がガウス性の場合に推定誤差分散を最小にするように係数: $\lambda_i(X_r)^{(2)}$ を決定すれば、式(3-b)により条件付平均値が求められ、 $\varepsilon(X_r)$ を平均値0、分散値が最小推定誤差分散値となるガウス白色雑音としてシミュレートすることでサンプル場: $Z^*(X_r)$ を求めることが出来る。確率場の性質がガウス性の場合には、結果として $\varepsilon(X)$ の無相関および独立性が成立する。

さて $Z(X_r)$ を任意の分布特性を有する非ガウス性確率場とする。この場合には、推定誤差分散に対応するような評価関数の最小化により得られる結果から $\varepsilon(X)$ の性質は容易に規定されないので、 $\varepsilon(X)$ を非ガウス性の k 次白色雑音としてあらかじめその性質を規定しておく。そして、非ガウス性確率場の3次元メントから、 $\lambda_i(X_r)^{(3)}$ を求めることを考える。推定誤差項: $\varepsilon(X_r)$ の $k=3$ 次白色性の条件のもとで、1-ル・ウォーカの式に類似の次式が得られる。

$$M_3(\Delta X_{rm}, \Delta X_{rm}) = \sum \lambda_i(X_r)^{(3)} * M_3(\Delta X_{im}, \Delta X_{im}) ; i=1 \sim n, m=1 \sim n \quad (4)$$

式(4)によると、3次元メントまで考慮した係数: $\lambda_i(X_r)^{(3)}$ を決定することができ、非観測点の座標: X_r が任意観測点: X_i に一致するときには、対応する $\lambda_i(X_i)$ のみ1.0となり、その他の係数は0となる。すなわち観測値と推定値が一致することが分かる。また推定誤差の3次元メントは次式で求めることができる。

$$\sigma^3(X_r) = M_3(0, 0) - \sum \lambda_i(X_r)^{(3)} * M_3(\Delta X_{ir}, \Delta X_{ir}) ; i=1 \sim n \quad (5)$$

式(4)を満足するという意味で、式(3-b)における $\hat{Z}(X_r)$ を決定することはできるが、ここでは $Z(X)$ の具体的な確率分布特性が未知であるので、 $\varepsilon(X_r)$ をシミュレートすることは不可能である。

4. 数値計算例

ガウス性の確率場: $W(X)$ が、次式により変換されるものとして非ガウス性の確率場 $Y(X)$ を考える。ここで、 $W(X)$ の平均値: $E[W(X)] = 0$ 、相互相関関数: $E[W(X)W(X+\tau)] = M_2^W(\tau) = \exp(-|\tau|/5.0)$ である。

$$Y(X) = W(X) + aW(X)^2 \quad (6)$$

ここで、 $0 < a < 1$ とする。式(6)より、 $E[Y(X)] = aM_2^W(0)$ であるので、 $Y(X)$ のランダム成分: $Z(X)$ は、 $Z(X) = Y(X) - E[Y(X)]$ として与えられる。例えば a^3 に関する項が十分に小さいとして省略し、式(2)より $Z(X)$ の2次元メントおよび3次元メントを求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} E[Z(X)Z(X+\tau_1)] &= M_2^W(\tau_1) + 2a^2(M_2^W(\tau_1))^2 \\ E[Z(X)Z(X+\tau_1)Z(X+\tau_2)] &= 2a[M_2^W(\tau_1)*M_2^W(\tau_2) + M_2^W(\tau_1)*M_2^W(\tau_2-\tau_1) \\ &\quad + M_2^W(\tau_2)*M_2^W(\tau_2-\tau_1)] \end{aligned} \quad (7)$$

以下に、数値計算の1例を示す。図-1は、 $Y(X)$ の1サンプル場を示している。図-2は、空間上の任意観測点において、図-1に示したサンプル実現値の一部が観測された条件のもとで、非観測点の推定値 $\hat{Y}(X_r)$ を、3次元確率メント特性をもとに求めた結果である。ここでは、 $a=0.6$ として、観測点は $X=0, 5, 10, 15, 20, 25(m)$ の各点であり、■はサンプル実現値を示し、○は推定値 $\hat{Y}(X_r)$ を示している。

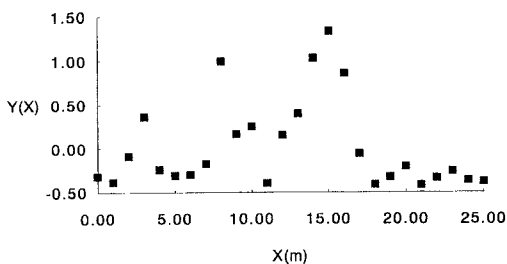


図-1. $Y(X)$ の1サンプル場

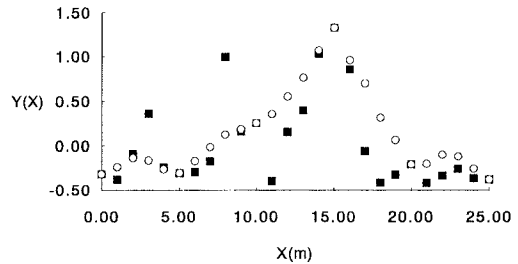


図-2. 推定結果

数値計算は、武蔵工大大学院生 秀嶋桂君の協力を得た。

参考文献: 1) M. Hoshiya: Jour. of EM (ASCE), Vol. 121, No. 2, 2) 野田: 第9回日本地震工学シンポジウム, pp247-252
3) 吉田他: 土木学会論文集(I-30), No. 507, 4) C. L. Nikias他: Proc. of IEEE, Vol. 75, No. 7