

ケーブルの張力と曲げ剛性の同時同定法

○摂南大学 学 西川 徹 摂南大学 正 頭井 洋
神戸工専 正 新家 徹 神戸製鋼 濱崎 義弘

1 まえがき

斜張橋、ニールセン橋などのケーブル構造物においては、架設の際にケーブルに、所定の設計張力が導入されているかどうかを十分に確認しておく必要がある。ケーブル張力計測の一方法として、ケーブルの固有振動数を測定して、これから張力を算定する振動法は、簡便なためよく利用されている²⁾。しかし、この方法では、ケーブルの曲げ剛性が既知であることを前提条件としている。また、斜張橋のレインパイプレーションの振動対策として、ダンパーが用いられることが多いがその最適設計には、ケーブルの曲げ剛性が必要である。ケーブルの曲げ剛性は充実断面の5~50%位と、ケーブルの種類や導入張力により変化し、曲げ剛性の正確な値を求めることは難しい。昨年、大きな張力のかかったケーブルを想定してモデルを作成し、拡張カルマンフィルタを用いてケーブルと曲げ剛性を同時に求める方法を報告した¹⁾。しかし、張力が小さくなると(後に述べる張力と曲げ剛性に関するパラメータ ξ が6以下になると)、誤差が大きくなる。実際に正確な曲げ剛性を必要とするのは、張力が小さい場合が多い。そこで、今回は固有振動数に関するパラメータの無次元化にはりの理論式を用いることで、張力が小さな場合でもケーブルの張力と曲げ剛性を同時に推定できる方法の開発を試みたものである。

2 ケーブル張力と固有振動数の関係

先の研究では、ケーブル張力(T)、ケーブルの曲げ剛性(EI)、ケーブル長さ(ℓ)より決まるケーブルの横方向剛性に関する無次元パラメータ $\xi = \sqrt{T/EI} \cdot \ell$ を導入し、1次振動の場合 $\xi \geq 3$ 、2次振動の場合 $\xi \geq 10$ を適用可能範囲とする近似式に基づいていた。そこでは、ケーブルの固有振動数 $f = \omega/2\pi$ を弦の n 次の固有振動数 $f_n^* = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{Tg}{w}}$ で除した無次元値 $\eta_n = f/f_n^*$ を導入して、 $\eta_n - \xi$ 間の近似式を用いた²⁾。これを用いた拡張カルマンフィルタは、 ξ の小さい範囲では誤差が大きくなる。そこで ξ が小さい場合について、新しい無次元値を導入する³⁾。両端固定ばりの振動数

$$f_n^B = \frac{\alpha_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (n=1, 2) \quad (1)$$

$$\alpha_1 = 4.730, \quad \alpha_2 = 7.8532$$

で張力を有するはりの振動数 f を無次元化すると、

$$\varphi_n = f/f_n^B \quad (2)$$

軸力が0($\xi=0$)のとき $\varphi_n=1$ となる。

張力を有するはりの振動方程式の解は、次式の $\varphi_n - \xi$ の簡単な関係式で近似できる³⁾。

$$\varphi_1 = \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{42}} \quad 1 \text{ 次振動} \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{85}} \quad 2 \text{ 次振動} \quad (4)$$

3 状態方程式と拡張カルマンフィルタ

数学モデルの各次ごとの運動方程式は、分布質量系の微分方程式あるいはFEMのモード解析よりつぎのように得られる。

$$m_n \ddot{x}_n + 2m_n \zeta_n \omega_n \dot{x}_n + m_n \omega_n^2 x_n = \phi_n^T \cdot F \quad (5)$$

$$\varphi_n = f/f_n^B, \quad \psi = EI/EI_0, \quad J = \frac{\alpha_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m}}$$

とおくと、

$$\ddot{x}_n + 2J\zeta_n \varphi_n \sqrt{\psi} \dot{x}_n + J^2 \varphi_n^2 \psi x_n = \frac{\phi_n^T}{m_n} \cdot F \quad (6)$$

ここに $\omega_n = \sqrt{k_n/m_n}$, $\zeta_n = c/(2\sqrt{k_n m_n})$, EI_0 はケーブルの充実断面の理論曲げ剛性である。

φ_n, ψ を含めた運動方程式を、状態方程式に書き直すと、

$$\dot{x} = Ax + bF \quad (7)$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -J^2 \varphi_n^2 \psi & -2J\zeta_n \varphi_n \sqrt{\psi} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C^2 (\eta_n^B)^2 T & -2C\zeta_n \eta_n^B \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

ここで $C = \frac{n\pi}{\ell\sqrt{m}}$, A_1 ははりの理論による無次元値($\xi \leq 6$), A_2 は弦理論による無次元値($\xi \geq 6$)を用いた場合の係数行列を表わす。

式(7)の状態量に未知パラメータとして、それぞれはりの理論による無次元値を用いた場合 $\zeta, \varphi, \sqrt{\psi}$ 、弦理論による無次元値を用いた場合 $\zeta, \eta, \sqrt{T}$ の3個を含め、拡大した状態量 z を次のように定義する。

a) はりの理論による無次元値を用いた場合

$$Z = \{x, \dot{x}, \zeta, \varphi, \sqrt{\psi}\}^T \quad (8)$$

b) 弦理論による無次元値を用いた場合

$$\mathbf{Z} = \{x, \dot{x}, \zeta, \eta, \sqrt{T}\}^T \quad (9)$$

を定義すると、式(8)、式(9)の各係数行列は、次のようになる。

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R^2 Z_i^2(4) Z_i^2(5) & -2R Z_i(3) Z_i(4) Z_i(5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_i \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに、

a) の場合 $R = J$, b) の場合 $R = C$

状態方程式(7)を時間領域で離散化し、システムノイズを加えると、

$$\mathbf{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{Z}_i + \begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{F} + \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \hat{\mathbf{w}}_i \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで $\mathbf{w}_i, \hat{\mathbf{w}}_i$ は、状態量のシステムノイズを表す。

4 パラメータの同定

ケーブルの長さ 5.0 m 、直径 4.6 cm のモデルを仮定して、張力、曲げ剛性、減衰比、振動数に関するパラメータと曲げ剛性に関するパラメータを、それぞれ $T = 2.0 \text{ tf}$ 、 $EI = 1.76 \text{ t} \cdot \text{m}$ 、 $\zeta = 0.03$ 、 $\varphi = 1.29$ 、 $\sqrt{\psi} = 0.708$ とした場合で、推定初期値を、 $T = 1.0 \text{ tf}$ 、 $EI = 1.40 \text{ t} \cdot \text{m}$ 、 $\zeta = 0.01$ 、 $\varphi = 1.19$ 、 $\sqrt{\psi} = 0.632$ と仮定した時のシミュレーション結果を、図1～5に示す。なお、観測値は、 $\ell/2$ 点と $\ell/4$ の加速度を用いている。

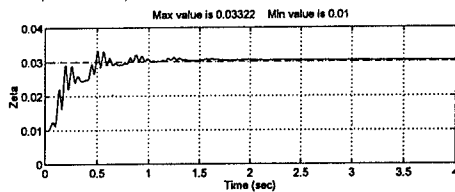


図-1 減衰比 (ζ) の同定結果

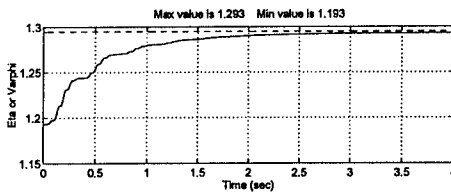


図-2 振動数に関するパラメータ (φ) の同定結果

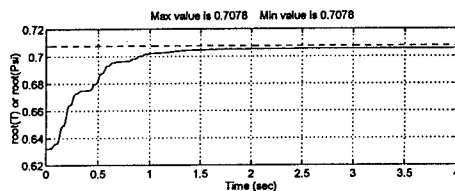


図-3 曲げ剛性に関するパラメータ ($\sqrt{\psi}$) の同定結果

図1～3は状態量の $Z(3) \sim Z(5)$ でそれぞれ正解値にかなり近づいていることがわかる。

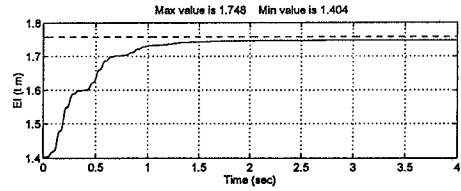


図-4 曲げ剛性 (EI) のシミュレーション結果

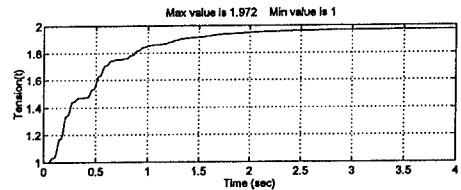


図-5 張力 (T) のシミュレーション結果

図4より、曲げ剛性 EI の初期値 $1.40 \text{ t} \cdot \text{m}$ が $1.75 \text{ t} \cdot \text{m}$ に、図5より、張力の初期値 $T = 1.0 \text{ tf}$ が $T = 1.97 \text{ tf}$ へと収束しており、それぞれ正解値にかなり近づいていることがわかる。

5 あとがき

本文では、張力を有する両端固定ばりの振動数の理論解に関する近似式³⁾を用い、拡張カルマンフィルタにより、ケーブルの張力、曲げ剛性を同定する方法を示した。ケーブルの力学特性がはりに近い場合から、弦に近い場合まで、同定が可能になり張力と曲げ剛性に関するパラメータ ξ が6以下の場合の有効性をシミュレーションにより確認した。今後、模型実験による実測値を用いた場合について、検討を進める予定である。

参考文献

- [1] 西川 徹・頭井 洋・新家 徹・濱崎 義弘：ケーブルの張力と曲げ剛性の同時同定法，土木学会年次学術講演会概要集，I-775, 1994-9
- [2] 新家・頭井他：振動法によるケーブル張力の実用算定式について，土木学会論文報告集 第294号 (1980-2)
- [3] 頭井 洋・新家 徹・濱崎 義弘：振動法によるケーブル張力実用算定式の補正，土木学会論文集投稿中
- [4] 片山：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，1983.
- [5] 丸山他：ARMA モデルによる既存構造物の動特性の同定，土木学会論文報告集 第416号/I-3(1990-4)