

I-418

ベイズ推定における離散化モデルに関する一考察

九州工業大学 学生員 ○田口 誠司
九州工業大学 正 員 山口 栄輝

1. はじめに

強力な計算機が手軽に利用できるようになった現在では、多くの分野で逆問題が注目されているが、線形な逆問題でも解析的に解ける問題はまれであり、ほとんどの場合、適当な離散化によって数値的に解が得られている¹⁾。本研究では、逆解析に用いる離散化モデルとして、解析対象領域を小領域に分割するものを扱う。与えられた情報が多ければ、一般にそこから得られる情報も多くなることを思えば、与件に見合った適切な分割数が存在すると思われる。本研究では、ベイズ推定を対象に、この点に関して考察を加える。

2. ベイズ推定²⁾

離散化により得られた次の連立一次方程式を、 $\mathbf{x}$ について解く逆問題を考える。

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1)$$

観測誤差 $\mathbf{e}$ と原ベクトル $\mathbf{x}$ の確率密度関数がわかっている場合、観測値 $\mathbf{b}$ が与えられれば、ベイズの定理より、 $\mathbf{x}$ の $\mathbf{b}$ に対する条件付き確率密度関数（事後確率）が求められる。ベイズ推定では、この事後確率を最大にする原ベクトル $\mathbf{x}$ の値を逆問題の解とする。

3. 解析例

解析対象として、図-1に示す単純梁を取り上げる。その梁のスパンを100とし、その左半分が階段状に分布する荷重 $\mathbf{x}$ を加える。この荷重の値は正規分布に従う乱数を発生させて得られたものである。荷重 $\mathbf{x}$ によるたわみを10箇所計算し、その最大値の $\pm 0.01\%$ 以内に収まる確率が90%になるような正規分布を設定して乱数を発生させ、それを誤差 $\mathbf{e}$ として加えたたわみを観測値 $\mathbf{b}$ とする。この $\mathbf{b}$ の値、および $\mathbf{e}$ と $\mathbf{x}$ の確率密度関数を与件とし、それより、 $\mathbf{x}$ の分布を算定する逆問題をここでは考える。

載荷区間を小区間に分割し、各小区間において $\mathbf{x}$ が一定値をとる離散化モデルを設定すれば、式(1)が容易に得られ、ベイズ推定により $\mathbf{x}$ を求めることが可能となる。このようにして得られる $\mathbf{x}$ は、分割数に大きく依存する。ここでは、長さ50の載荷区間を1～10の小区間に等分割する10個のモデルを設定し、これらのモデルを用いて逆解析を行った。

3.1 確率密度関数によるモデルの評価

ベイズ推定では事後確率を最大にするよう $\mathbf{x}$ を定めるが、その最大値はモデルごとに異なる。ここでは、この値を、異なる分割数を有するモデル間の比較に用いることを検討する。そのために、各モデルについてこの最大値を計算し、まとめたのが図-2である。また各モデルによって得られた $\mathbf{x}$ と真の $\mathbf{x}$ 分布の差（誤差）の二乗和を図-3に示している。

図-2、3によれば、分割数2のモデルで事後確率は最大となるのに対し、真の $\mathbf{x}$ 分布との差が最小となるのは分割数が5の場合であることがわかる。この結果より、事後確率はモデル間の比較には適用できないと判断される。

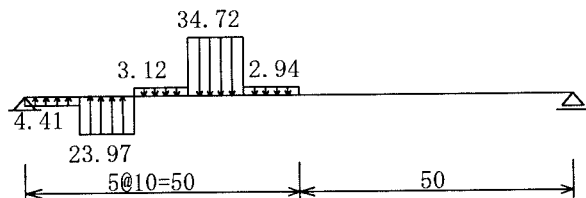


図-1 単純梁

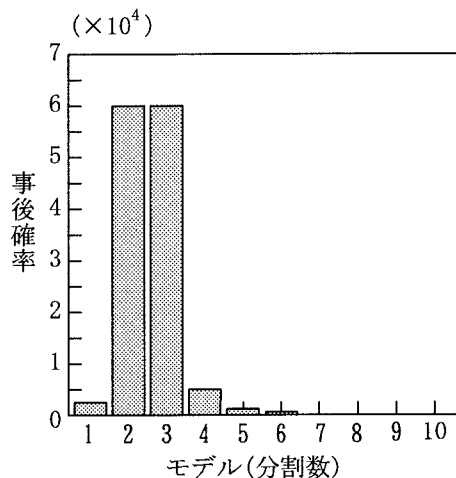


図-2 事後確率の最大値

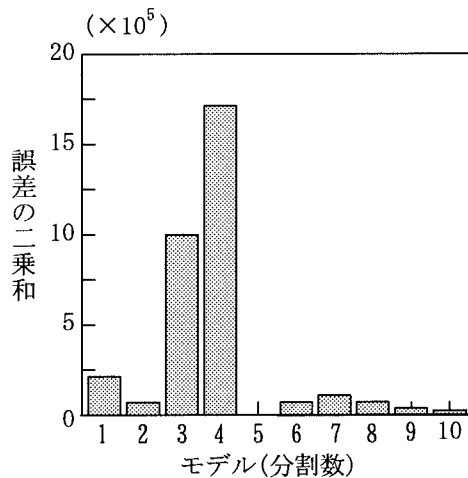


図-3 二乗誤差

3.2 対数尤度によるモデルの評価

真の分布とモデルの良さを表す客観的な規準に対数尤度があり、その値が大きいほど良いモデルとされる³⁾。ここでは、対数尤度によるモデルの評価について検討する。

図-1の例題では、与件から b の確率密度関数を求めることができる。対数尤度は、観測値に対するこの確率密度関数の対数として定義され、各モデルについて算出した値を図-4に示している。

この図によれば、分割数5のモデルで対数尤度は最大値をとる。また図-3より明らかなように、このモデルで誤差は最小となり、対数尤度がモデル判定の目安になりうることが理解される。

4. まとめ

例題により、対数尤度が離散化モデルの良さを判定する目安になり得ることを示した。この結果は、また、AICやABIC⁴⁾等を用いたアプローチ⁵⁾の有効性を示唆するものであり、今後さらに検討を加える予定である。

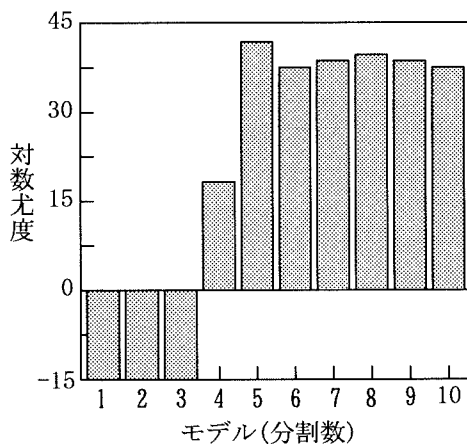


図-4 対数尤度

参考文献

- 1) 久保史朗：逆問題，培風館，1992.
- 2) 岡本良夫：逆問題とその解き方，オーム社，1992.
- 3) 坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎：情報量統計学，共立出版，1983.
- 4) 廣松毅，浪花貞夫：経済時系列分析，朝倉書店，1990.
- 5) Honjo, Y., Liu, W.-T., Sakajo, S. : Application of Akaike Information Criterion Statistic to Geotechnical Inverse Analysis: Extended Bayesian Method, Structure Safety, 1994.