

連続量最適解と離散量最適解

群馬高専 正員 平田恭久

1. まえがき

通常の最適化手法は連続量を基本にしているので、得られた最適解は連続量最適解である。これに対し、実際の設計寸法は板厚、板幅など離散量として扱われているのが普通である。このため、①離散量として最適化を行う、②連続量最適解から離散量最適解を求める、などの対策が必要になる。ここでは、連続量最適解が得られている場合が多いことを考慮して上記②に着目するが、問題を単純化するため連続量最適解を囲む離散点枠を考える。連続量最適解を出発点とする離散化は、活性制約面上を離散点枠に向かって移動していくが、これは通常の探索とは逆の動きになり、目的関数の増加がなるべく小さい方向を見つけることになる。活性制約面上での移動には、等式制約法で用いているタブローでの掃き出しを利用するが、このタブローは離散解の改善にも有効である。

2. 離散点制約式と活性制約面

最適化問題は式(1)であり、これより得られた連続量最適解 x^* に対する離散点制約式は式(2)になるが、 x_u は x^* を囲む上限離散点、 x_l は下限離散点であり、上限と下限の差は式(3) Δx になる。 x を n 次元とすると、 x_u 、 x_l で形成する n 次元立方体を離散点枠と称しているが、この離散点枠の内部に x^* は存在している。一方では、 x^* は通常の制約式 g が形成する活性制約面 g_m 上に存在するので、離散点枠と g_m を組み合わせると図-1のようになる。

図-1は3次元であり、 $g_m^T = [g_1, g_2]$ なので従属変数 x_m は2次元、独立変数 x_s は1次元になる。 x^* での目的関数 f の接平面を f 接平面と称するが、① g_m の非線形性が強くない、②離散点間隔 Δx が大きい、と仮定すれば、 g_m 方向(x_s 方向)では f 接平面と g_m との離れは小さい。よって、 g_m 上では近似的に f^* 一定とみなせるので、 x_s 方向には近接離散点(g_m の非線形性を考慮したときの f の増加をなるべく小さくするため)へ移動すればよく、 x_k 点から近接離散点へ向く方向 dl_s は式(4)で表される。

dl_s 方向の移動により x_s が離散点制約式に抵触し、 $x_{sj} = x_{usj}$ または $x_{sj} = x_{lsj}$ に固定されたら、次に x_m についての移動は、 g_m から離れて活性制約面上を離散点に向かって移動する(図-1では x_k から矢印の方向)。このためには、ある g_i を g_m から削除して x_m から自由度のある変数 x_j を作り、この x_j を離散化する。このときの g_i と x_j をどのように選択するかが問題となるが、選択基準は式(5)、式(6)とする。式(5)は g_i を削除した g_m 上を離散点枠に向かって進むとき、 f の増加が最も小さい方向を選ぶものであり、 $\Delta x d_j$ はそのときの x_m の変化である。

3. 離散化とタブロー利用

等式制約法では、式(1)についての活性制約式 g_m とその

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{subject to } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} g_u &= x^* - x_u \leq 0 \\ g_l &= x_l - x^* \leq 0 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

$$\Delta x = x_u - x_l \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} d_{sj} &= x_{usj} - x_{ksj} \\ \text{または } x_{lsj} - x_{ksj} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

の絶対値の小さい方

$$g_m \text{ から削除するのは } \Delta f_i = \lambda_i \sum -\nabla g_{ij} \cdot \Delta x d_j \text{ の最も小さい } g_i \quad \dots (5)$$

$$x_m \text{ から削除するのは 式(5) } g_i \text{ の掃き出し行の } x_j \quad \dots (6)$$

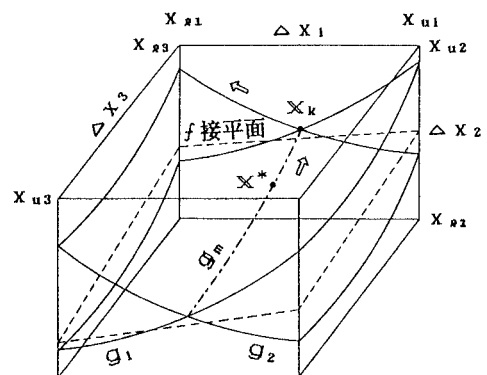


図-1 離散点枠と活性制約面

従属変数 x_m をシンプレックス・タブローの掃き出しで求めているので、連続量最適解から離散量最適解を得る場合にもこのタブローを利用することにした。離散化では、式(1)の通常制約式 g と共に離散点制約式

図-2 タブロー(活性制約面)

	f	g_m	g_{r-m}	g_u	g_s	$g_s (dx)$	
g	f^*	0_m^T	$-g_{r-m}^T$	$-g_{um}^T$	$-g_{us}^T$	$-g_{rs}^T$	1
x_n	x_m	I_m	B	$-D$	0	D	0
x_s	$\nabla_s L$	0	C	$-E$	$-I_s$	E	I_s
		1~r個		1~n個		0_m^T	0_s^T
						1~n個	dx

	f	g_m	g_{r-m}	g_u				$g_s (dx)$			
g	$f^* + \nabla f$	$-g_m^T$	$-g_{r-m}^T$	0_m^T	Δx_m^T	0_s^T	Δx_s^T	Δx_m^T	0_m^T	Δx_s^T	0_s^T
x_{mu}	$-\nabla_m f_u$	$\nabla_m g_{mu}^T$	$\nabla_m g_{r-mu}^T$	I_{mu}	0	0	0	$-I_{mu}$	0	0	0
x_{ms}	$-\nabla_m f_s$	$-\nabla_m g_{ms}^T$	$-\nabla_m g_{r-ms}^T$	0	$-I_{ms}$	0	0	0	I_{ms}	0	0
x_{su}	$-\nabla_s f_u$	$\nabla_s g_{su}^T$	$\nabla_s g_{r-su}^T$	0	0	I_{su}	0	0	0	$-I_{su}$	0
x_{ss}	$-\nabla_s f_s$	$-\nabla_s g_{ss}^T$	$-\nabla_s g_{r-ss}^T$	0	0	0	$-I_{ss}$	0	0	0	I_{ss}
	通常制約式 g				離散点制約式 g_u			dx_{mu}^T	dx_{ms}^T	dx_{su}^T	dx_{ss}^T

図-3 タブロー(離散化) 離散点制約式 g_s

g_u, g_s も満足する必要があるので、タブローに g_u, g_s を付加した。タブローの g_s 列と dx 列は同じになるので、両者を合わせて一つにしている。図-2は x^* で活性制約面を掃き出した状態を示している。

x_s, x_n を活性制約面上で離散点枠まで移動させるには、図-2のタブローで離散点制約式について $-g_u = 0$ または $-g_s = 0$ とする掃き出しを実行すればよい。タブローの掃き出しを用いる利点は、① g, g_u, g_s に抵触したときの処理、②活性制約面の非線形性の考慮、が可能なことである。すべての変数 x_j について離散化が終了すると図-3のタブローになるが、 g_u 側または g_s 側に掃き出したことを区別するため u と s に分けており、正の1が掃き出しでの軸要素である。微分 $\nabla f, \nabla g$ は x^* での値であり、 x^* から離散解に移動したことにより f, g は変化した、目的関数は f^* から $f^* + \nabla f$ へと増加する。

4. 離散解の改善

上記3.の離散化より得られた離散解は g に抵触していないことから許容離散解であるが、まだ改善の余地が残っている。一つは活性離散解への移動であり、図-3の①点の場合、②点または③点への移動で f は改善される。②点等は直接的な移動では g に抵触し f は改善されないで、活性離散解と称している。活性離散解は図-3タブローで g_u 側に掃き出された x_j を、 g に抵触しないで g_s 側に掃き出せるかを試行することより得られる。

②点、③点は共に活性離散解であるが、③点の方が f が小さい。②点から③点へ移動するには Δx_{s1} と Δx_{m2} の交換が必要になるが、これがもう一つの改善である。これは厳密には組み合わせ問題を解くことになるので、簡単な方法で f が少しでも改善されることを考える。 g を抵触する側で移動する方法(図-4の矢印)が一つの案である。

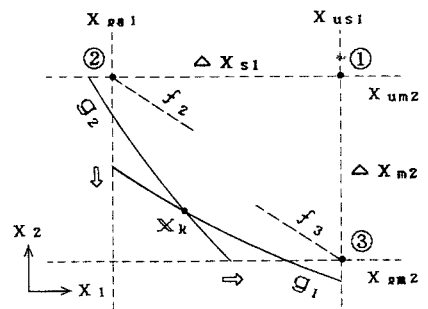


図-4 離散解の改善

5. まとめ

ここで述べた方法は、①離散量最適解も活性制約面に依存していることから出発し、②離散量として最適化を行うことから生じる難しさを避け、③通常得られている連続量最適解との関係を明らかにする、ことを基本にしている。また、離散化には等式制約法で用いているタブローでの掃き出しを利用している所に特色がある。しかしながら、厳密な離散量最適解を得るものではなく、個々のアルゴリズムにもまだ未熟な点が多いのが現状である。今後はアルゴリズム改善に努め、効率的な離散量最適化手法に発展させたい。