土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

I －247

トラス構造物の形状感度解析

東洋大学　学生員　○早川　恒
東洋大学　正会員　新延　泰生
（株）大東設計ｺﾝｻﾙﾀﾝﾄ　正会員　榎本　覚雄

1. はじめに

従来の感度解析では、感度変数を部材断面積、断面二次モーメントおよびそれらの逆数を扱っていたが、本研究における形状の感度解析では、感度変数を節点の座標とし、形状感度係数、形状感度係数特性を導いた。そしてトラス構造物を例にとり、形状感度係数を用いて、構造物の形状を決める節点座標を変動させたときの、応答の推定を行った。

2. 形状感度解析

1) 形状感度係数

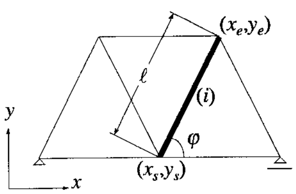

Fig-1

Fig-1 のトラス構造の任意の要素（部材）i に注目する。節点座標は、部材の始節点の座標を (x_s,y_s)、終節点の座標を (x_e,y_e) とする。そこで、部材（要素）の長さ ℓ、角度 φ を節点座標で表すと

$$\ell=\sqrt{(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2} \tag{1}$$

$$\cos\varphi=\frac{x_e-x_s}{\ell}=\lambda \tag{2}$$

$$\sin\varphi=\frac{y_e-y_s}{\ell}=\mu \tag{3}$$

となり、トラス構造の i 部材の要素剛性マトリックス k_i は、有限要素法より次のように表される。

$$k_i=\frac{E_iA_i}{\ell_i}\begin{bmatrix}\lambda_i^2 & \lambda_i\mu_i & -\lambda_i^2 & -\lambda_i\mu_i\\ \lambda_i\mu_i & \mu_i^2 & -\lambda_i\mu_i & -\mu_i^2\\ -\lambda_i^2 & -\lambda_i\mu_i & \lambda_i^2 & \lambda_i\mu_i\\ -\lambda_i\mu_i & -\mu_i^2 & \lambda_i\mu_i & \mu_i^2\end{bmatrix} \tag{4}$$

このマトリックスの成分は感度変数について非線形であるため、直接計算していくことは効率的ではない。そこで次のような独立変数を定義する。

$$a_i=\frac{\lambda_i^2}{\ell_i}=\frac{(x_e-x_s)^2}{\left\{(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2\right\}^{3/2}} \tag{5}$$

$$b_i=\frac{\lambda_i\mu_i}{\ell_i}=\frac{(x_e-x_s)(y_e-y_s)}{\left\{(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2\right\}^{3/2}} \tag{6}$$

$$c_i=\frac{\mu_i^2}{\ell_i}=\frac{(y_e-y_s)^2}{\left\{(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2\right\}^{3/2}} \tag{7}$$

式 (5)，(6)，(7) を式 (4) に代入すると

$$k_i=E_iA_i\begin{bmatrix}a_i & b_i & -a_i & -b_i\\ b_i & c_i & -b_i & -c_i\\ -a_i & -b_i & a_i & b_i\\ -b_i & -c_i & b_i & c_i\end{bmatrix} \tag{8}$$

となる。

形状感度係数とは、節点変位 z_k (k=1,2,…,自由度数) を設計変数である節点座標 X_h (h=1,2,…,節点数×2) で偏微分した $\partial z_k/\partial X_h$ で表される。ここで独立変数 a_i,b_i,c_i (i=1,2,…,部材数)を中間変数として形状感度係数を表すと

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_h}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial X_h}+\frac{\partial z_k}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial X_h}+\frac{\partial z_k}{\partial c_i}\frac{\partial c_i}{\partial X_h}\right) \tag{9}$$

となる。ここで、$\partial z_k/\partial a_i$，$\partial z_k/\partial b_i$，$\partial z_k/\partial c_i$ は静的感度解析より

$$\frac{\partial z_k}{\partial a_i}=-K^{-1}\frac{\partial K}{\partial a_i}z_k \tag{10}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial b_i}=-K^{-1}\frac{\partial K}{\partial b_i}z_k \tag{11}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial c_i}=-K^{-1}\frac{\partial K}{\partial c_i}z_k \tag{12}$$

と表され、剛性マトリックスの逆マトリックス K^{-1} および節点変位 z_k は有限要素解析より既知である。$\partial K/\partial a_i$，$\partial K/\partial b_i$，$\partial K/\partial c_i$ は全体剛性マトリックス K を a_i,b_i,c_i それぞれで偏微分したものである。また、$\partial a_i/\partial X_h$，$\partial b_i/\partial X_h$，$\partial a_i/\partial X_h$，は、$a_i,b_i,c_i$ を設計変数 X_h すなわち節点座標 x_s，y_s，x_e，y_e で偏微分したものである。したがって、独立変数 a_i,b_i,c_i を中間変数として用いることにより、形状の感度係数は式 (9) より比較的容易に計算できる。

2) 形状感度係数特性

形状感度係数を部材レベルで考えて、設計変数すなわち節点座標 x_s，y_s，x_e，y_e を乗じ、i について 1 から m (部材数) まで総和をとれば

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z_k}{\partial a_i}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z_k}{\partial b_i}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial z_k}{\partial c_i}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right) \tag{13}$$

となる。式中の（　）は次式のように表される。

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e=-a_i \tag{14}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e=-b_i \tag{15}$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e=-c_i \tag{16}$$

式 (14)，(15)，(16) を式 (13) に代入すると

$$-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial a_i}a_i+\frac{\partial z_k}{\partial b_i}b_i+\frac{\partial z_k}{\partial c_i}c_i\right)$$

$$=K^{-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial K}{\partial a_i}a_i+\frac{\partial K}{\partial b_i}b_i+\frac{\partial K}{\partial c_i}c_i\right)z_k$$

$$=K^{-1}K\,z_k=z_k \tag{17}$$

となる。

形状感度係数にX_h/z_kを乗じ、について1から$2NN$ (節点数×2) まで総和をとったものと、式 (13) を節点変位z_kで割ったものは、実質上同じ意味を持っている。よって式 (17) より

$$\sum_{h=1}^{2NN}\frac{\partial z_k}{\partial X_h}\frac{X_h}{z_k}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s}x_s+\frac{\partial z_k}{\partial y_s}y_s+\frac{\partial z_k}{\partial x_e}x_e+\frac{\partial z_k}{\partial y_e}y_e\right)\frac{1}{z_k}$$

$$=z_k\frac{1}{z_k}=1 \tag{18}$$

となる。これは任意のトラス構造物に対して成立する関係式である。従来の無次元化感度係数特性[1]と同様に定数になることを示している。

3) 数値計算例

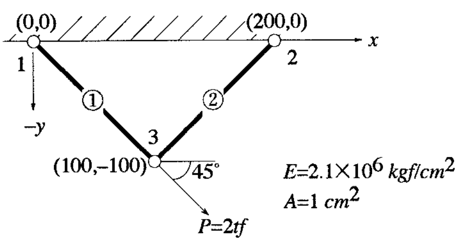

Fig-2　2部材トラス

Fig-2の2部材トラスの形状感度係数と形状感度係数特性についての計算結果をTable-1に示す。

形状感度係数を用いた応答の推定方法は、設計変数X_hがX'_hより$X'_h=X_h+\delta X_h$へ微小変動した場合、関数z'_k（応答）は近似的に次のように表される。

$$z'_k=z_k+\sum_{h=1}^{2NN}\left\{\frac{\partial z_k}{\partial X_h}\right\}\delta X_h \tag{19}$$

z_kは与えられた設計変数X_hに対する応答を示し、$\{\partial z_k/\partial X_h\}$は$X_h$に対する形状感度係数ベクトルである。式(19)よりFig-2の2部材トラスの応答の推定を行い、結果をFig-3,4に示す。このとき節点3のx座標は、100cmに固定し、節点3のy座標を−10cmから−200cmまで、10cmきざみで水平変位と鉛直変位を求め、形状感度係数の応答に対する線形性の検討を行った。

Table-1

水平変位 $u_3=$ 0.0952237	鉛直変位 $v_3=$ -0.0952237		
$\partial u_3/\partial x_1=$ -1.355E-18	$\partial v_3/\partial x_1=$ 0.0009522	$\partial u_3/\partial x_1\times x_1/u_3=$ 0	$\partial v_3/\partial x_1\times x_1/v_3=$ 0
$\partial u_3/\partial y_1=$ 0.0009522	$\partial v_3/\partial y_1=$ -1.355E-18	$\partial u_3/\partial y_1\times y_1/u_3=$ 0	$\partial v_3/\partial y_1\times y_1/v_3=$ 0
$\partial u_3/\partial x_2=$ -0.0004761	$\partial v_3/\partial x_2=$ -0.0004761	$\partial u_3/\partial x_2\times x_2/u_3=$ -1	$\partial v_3/\partial x_2\times x_2/v_3=$ 1
$\partial u_3/\partial y_2=$ 0.0004761	$\partial v_3/\partial y_2=$ 0.0004761	$\partial u_3/\partial y_2\times y_2/u_3=$ 0	$\partial v_3/\partial y_2\times y_2/u_3=$ 0
$\partial u_3/\partial x_3=$ 0.0004761	$\partial v_3/\partial x_3=$ -0.0004761	$\partial u_3/\partial x_3\times x_3/u_3=$ 0.5	$\partial v_3/\partial x_3\times x_3/v_3=$ 0.5
$\partial u_3/\partial y_3=$ -0.0014284	$\partial v_3/\partial y_3=$ -0.0004761	$\partial u_3/\partial y_3\times y_3/u_3=$ 1.5	$\partial v_3/\partial y_3\times y_3/v_3=$ -0.5
		$\Sigma=$ 1	$\Sigma=$ 1

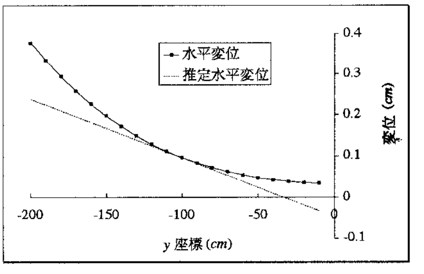

Fig-3　水平変位の推定

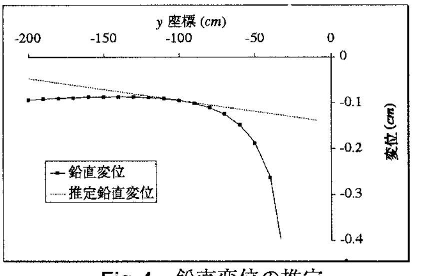

Fig-4　鉛直変位の推定

3.　おわりに

本研究では、トラス構造物を例にとり形状感度係数が中間的な変数をおくことにより比較的容易に得られ、また形状感度係数特性を導くことができた。さらに形状感度係数を用いた応答の推定は、節点座標の変動が小さければ総じて可能であるということが得られた。今後は、他の骨組構造物に発展させる予定である。

（参考文献）

1) 新延・松井・菊田：骨組構造物の応答感度係数の特性，土木学会論文集，No.450/I-20,pp.75-83,1992.7