I －213

カルマンフィルタを用いた波速の同定を含む波浪の推算

○ 中央大学　学生員　稲本 耕介
（株）INA　正員　高木 利光
中央大学　正員　川原 睦人

1 はじめに

海岸における波浪の解析は、沿岸の防災という問題にも通ずる大変重要な問題であり、数値計算による解析も様々になされている。しかし今までの数値計算では、設定された初期条件、境界条件、あるいはモデル中のパラメータ等に対して、いかに正しく計算されるかということに主眼が置かれてきた。

しかし、それらの条件には不確実な要素が多く含まれることから、実際に観測されるデータを効率的に取り込み、より現実に即した計算結果を求める解析を行う。モデル化した基礎方程式の不確実性や、観測時の雑音等が含まれていることから、確率過程に基づいた推定が必要になる。

本研究はカルマンフィルタ理論を用いて水位変動量分布の推定を行うことを目的とする。ここでは非定常緩勾配方程式を基礎方程式として用い、その数値解析法には有限要素方程式を適用する。

基礎方程式にはシステムパラメータとして波速値が導入されている。確定解析においては与えられた入射周期から計算される値を用いるが、ここでは観測値の変動を反映させるために拡張カルマンフィルタを導入して波速値の同定を行いながら状態量の推定を行った。

2 解析モデル

2.1 基礎方程式

確定解析の基礎方程式として西村ら (1983) により導かれた以下に示す非定常緩勾配方程式を用いるものとする。

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + c^2\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + c^2\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n}\{\frac{\partial}{\partial x}(nq_x) + \frac{\partial}{\partial y}(nq_y)\} = 0 \tag{3}$$

ここに、q_x, q_y は x, y 方向への線流量、η は水位変動量を表す。c は波速、n は「波速と群速度の比」であり、以下の関係を持つ。

$$c = \frac{g}{k}\sqrt{\tanh kh} \quad , \quad n = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}) \tag{4}$$

式 (4) において g は重力加速度、h は水深、k は波数であり、それぞれと角周波数 ω との間に次の分散関係式が成立している。

$$\omega^2 = gk\tanh kh \tag{5}$$

2.2 有限要素方程式

線流量および水位に対してその空間近似には三角形一次要素による内挿補間関数を用い、ガラーキン法を適用すると以下の有限要素方程式を得る。

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_{x\beta} + c^2 H^x_{\alpha\beta}\eta_\beta = 0 \tag{6}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_{y\beta} + c^2 H^y_{\alpha\beta}\eta_\beta = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\beta \;&+\; H^x_{\alpha\beta}q_{x\beta} + H^y_{\alpha\beta}q_{y\beta} \\ &+\; \frac{1}{n}(S^x_{\alpha\beta\gamma}n_\beta q_{x\gamma} + S^y_{\alpha\beta\gamma}n_\beta q_{y\gamma}) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

また時間方向離散化については、一段階の陽的解法を用いるものとする。

3 拡張カルマンフィルタ

3.1 基礎方程式

状態ベクトル観測ベクトルとして拡張カルマンフィルタの状態方程式と観測方程式は以下のように表される。

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = f_t(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_k \tag{9}$$

$$\boldsymbol{y}_k = h(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{v}_k \tag{10}$$

ここに、$\boldsymbol{x}_k$ は未知変数ベクトルとして各節点における水位変動量・流量、および未知システムパラメータである波速から構成される。未知パラメータが状態ベクトルに対して非線形になっていることから拡張カルマンフィルタを導入した。状態方程式は前述の有限要素法定式を表す。$\boldsymbol{y}_k$ は観測量ベクトルであり、観測方程式により状態量の一部が観測されることを表す。$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$ はそれぞれの方程式の不確実性を考慮して付加されるシステム雑音、観測雑音である。さらにこれらの雑音に対しては以下の性質を有するものと仮定する。

$$E\{\boldsymbol{w}_k\} = 0 \;\; , \;\; cov\{\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_j\} = \boldsymbol{Q}\delta_{kj} \tag{11}$$

$$E\{\boldsymbol{v}_k\} = 0 \ , \ cov\{\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j\} = \boldsymbol{R}\delta_{kj} \qquad (12)$$

ここに、$E\{\}$ は期待値、δ はクロネッカーのデルタを示す。また、雑音は白色ノイズとし $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$ は互いに独立であるとする。

3.2 アルゴリズム

正規過程の仮定に基づいて、以下のような時間更新、観測更新としてまとめられた状態量推定値、推定誤差共分散に関するアルゴリズムが導かれる。観測ベクトル y_k を取り込んで初期値から繰り返すことにより、各時間での推定値 $\hat{x}_k$ と誤差分散 P_k が逐次的に得られる。

初期値

$$\boldsymbol{x}_{0|-1} = \bar{\boldsymbol{x}}_0 \qquad (13)$$

$$\boldsymbol{P}_{0|-1} = V_0 \qquad (14)$$

観測更新 (measurement update)

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{R})^{-1} \qquad (15)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{x}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_{k|k-1}) \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})\boldsymbol{P}_{k|k-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})^T + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_k^T \qquad (17)$$

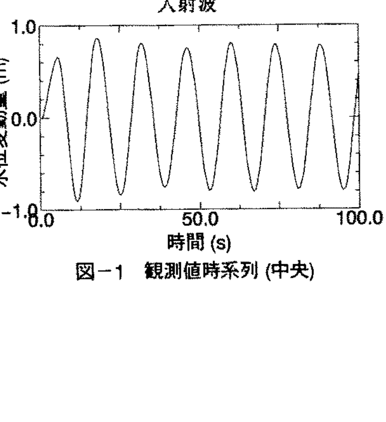
時間更新 (time update)

$$\boldsymbol{x}_{k+1|k} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_k \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{P}^*_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}^T \qquad (19)$$

ここでマトリックスは状態方程式を推定値のまわりでテイラー展開して線形化を行ったときの関係からパラメータを θ_t として以下のように与えられる。

$$\boldsymbol{F}_k = \begin{bmatrix} f(\hat{\theta}_{k|k}) & \frac{\partial f_k(\hat{\theta}_{k|k}, \hat{x}_{k|k})}{\partial \theta_t} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\hat{\theta}_{k|k}) & \frac{\partial x_{k+1|k}}{\partial \theta_t} \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad (20)$$



図－1 観測値時系列 (中央)

4 数値計算例

上記のアルゴリズムを検証するため、以下に示すモデル領域における波浪伝播の推定に適用した。左岸と中央は防波堤を表す壁条件とし、下端から入射周期 14.0s, 入射振幅 0.7m の波が入射するものとする。水深は、領域内一定とし図中の観測点における流量・水位変動量の順解析結果にノイズを付加したデータを観測値として全節点での状態量、および波速の推定を行った。波速の収束状況と防波堤後における水位変動量の推定値の時系列を示す。波速は観測値に用いた値に収束し推定値もノイズ分を消去して推定されることがわかる。

5 おわりに

本手法の適用により波浪場の水位変動量推定問題において有効な推定値が得られた。またシステムパラメータのである波速の同定値は観測値に用いた値に収束することが確認できた。これにより逆に入射周期をも知ることができる。

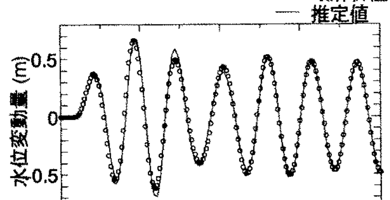
この計算には計算時間と記憶容量が大きくかかるのでその問題を回避する手法を示し、この検証をふまえて実観測値への適用を行う。

参考文献

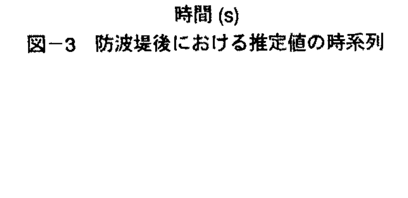
[1] 西村仁嗣・丸山安樹・平口博丸: 直接数値積分による波の場の解析, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp.123-127

[2] 片山徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983

[3] Frank L. Lewis: Optimal Estimation, A Wiley-Interscience Publication, 1986



図－2 パラメータ(波速^2)収束状況



図－3 防波堤後における推定値の時系列