土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

I -211

粘弾性面外波動問題の時間領域境界要素法

福井大学　正員　○　福井卓雄
石川高専　正員　　船戸慶輔
堺　　市　正員　　中江　崇

1　はじめに

粘弾性体中のSH波の伝播問題を時間領域境界要素法により解析する手法を提案する。この方法は,境界要素法と有限要素法の結合解法などを用いる必要がある場合に,時間領域境界要素法を構成するためのものである。

2　粘弾性面外波動問題の境界要素法

粘弾性面外波動問題の時間領域および周波数領域境界要素法の定式化についてまとめておく。

媒質は等方等質の線形粘弾性体である。ρ は媒質の質量密度, E はせん断に対する緩和関数である。緩和関数 $E(t)$ は不遡及の公理 $E(t)=0,\ -\infty<t<0$ を満足するものとする。面外波動を考えるので, 3次元空間の直交座標系を (x_1,x_2,x_3) とするとき, 変位は x_3-方向成分のみを考え, すべての物理量は (x_1,x_2) だけの関数であるとする。また, 微分に関する省略表現 $\dot{u}=\partial u/\partial t$ および $u_{,i}=\partial u/\partial x_i$ を用いる。$f*g$ はくりこみ積 [1] を表す。2次元領域 B における x_3 方向の変位を $u(\boldsymbol{x},t)$ とし, その Fourier 変換を $u^*(\boldsymbol{x})=\mathcal{F}[u]=\int_{-\infty}^{\infty}u(\boldsymbol{x},t)e^{i\omega t}\,dt$ とする。以上の規約により, 時間領域および周波数領域における線形粘弾性面外波動問題の基礎式 [1, 2] はつぎのようになる。

時間領域問題　　　　　　　　　　　　　周波数領域問題

$$E*du_{,ii}=\rho\ddot{u} \quad \vdots \quad E^*(\omega)u^*_{,ii}=-\rho\omega^2u^*$$

周波数領域問題における $E^*(\omega)$ は複素弾性係数であり, 緩和関数 E の Fourier変換により $E^*(\omega)=-i\omega\mathcal{F}^{-1}[E]$ で与えられる。周波数領域の基礎方程式は, 複素数の波数 $k=\omega/\sqrt{E^*/\rho}$ を用いて書き直すと,

$$u^*_{,ii}+k^2u^*=0$$

となる。これは Helmholtz 型の方程式であり, 形式的には, Helmholtz 方程式とまったく同じ取扱いができる。

境界要素法を定式化するためには, まず, 基礎方程式の基本特異解が解析的に閉じた形で得られることが必要である。時間領域問題については, 一般的な線形粘弾性モデルに対する基本特異解が解析的には得られないので, 直接に時間領域の境界要素法を構成することは難しい。しかし, 周波数領域問題については, Helmholtz 型方程式を扱うので, その基本特異解はよく知られており, Hankel 関数 $\mathrm{H}_0^{(1)}$ で表すことができる。

$$G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)=? \quad \vdots \quad G^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=(i/4)\mathrm{H}_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$$

いま, 基本特異解が両方の問題について与えられていると仮定すると, それぞれの境界値問題に対する境界積分方程式は一般化した Green 公式により, 境界 ∂B の上で次のように与えられる。

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{x},t)=\int_{\partial B}[G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*s(\boldsymbol{y})-S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*u(\boldsymbol{y})]\,ds_y \ \vdots\ \frac{1}{2}u^*(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}[G^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})s^*(\boldsymbol{y})-S^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})u^*(\boldsymbol{y})]\,ds_y$$

n_i は境界上の単位法線ベクトルである。境界応力 s および第二基本特異解 S はつぎのように定義される。

$$s(\boldsymbol{x},t)=n_i(E*du_{,i}) \quad S(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)=E*\frac{\partial G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)}{\partial n_y} \ \vdots\ s^*(\boldsymbol{x})=n_i(E^*u^*_{,i}) \quad S^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=E^*\frac{\partial G^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})}{\partial n_y}$$

境界要素法を導くために，境界上の関数 u, s に適当な近似を導入する。ただし，空間的には両方で同じ近似を行う。たとえば，境界上の変位をつぎのように表す。応力の場合も同様である。

$$u(\boldsymbol{x},t)=\sum_i\sum_K \phi_i(\boldsymbol{x})\psi_K(t)u_i^K \qquad \vdots \qquad u^*(\boldsymbol{x})=\sum_i \phi_i(\boldsymbol{x})u_i^*$$

上の近似によって，境界積分方程式は離散化されて，以下のようになる。

$$\frac{1}{2}u_i^N=\sum_i\sum_K^N\left[A_{jK}(\boldsymbol{x}_i,N\Delta t)s_i^K-B_{jK}(\boldsymbol{x}_i,N\Delta t)u_i^K\right] \vdots \qquad \frac{1}{2}u_i^*=\sum_i\left[A_j^*(\boldsymbol{x}_i)s_i^*-B_j^*(\boldsymbol{x}_i)u_i^*\right]$$

ここで，離散方程式の係数は，たとえば A については以下のようになる。

$$A_{iK}(\boldsymbol{x},t)=\int_{\partial B}\left[G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*\psi_K\right]\phi_i(\boldsymbol{y})\,ds_y \qquad \vdots \qquad A_i^*(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\phi_i(\boldsymbol{y})\,ds_y$$

3　時間領域解法のための積分変換

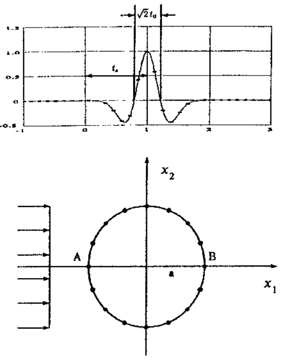
時間領域問題の基本特異解が求まっていないので，時間領域境界要素法を導くためには，上で述べた定式化のどれかの段階で周波数領域問題から時間領域問題への Fourier 逆変換をしなければならない。ここでは，最後に得られた離散方程式の係数行列を数値的に逆変換する方法を採用した。この目的のためには，時間軸上の近似を考慮して，最後の係数の定義に関する式より，

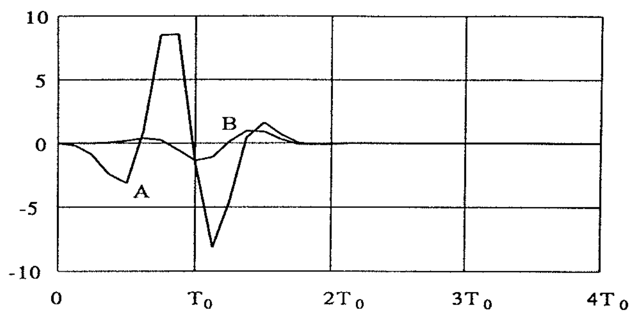
$$A_{iK}(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{F}^{-1}\left[A_i^*(\boldsymbol{x})\mathcal{F}[\psi_K]\right]$$

を数値的に計算すれば良いことになる。

ここで問題が生ずる。この操作には周波数に関する無限積分が含まれる。周波数が無限大に近づくときの基本特異解の特性から，被積分関数はゆっくりと収束する周期関数となり，積分の収束性はきわめて悪い。通常の FFT や二重指数関数型の数値積分公式を用いることができない。そこで，周波数が大きいときの被積分関数の周期をあらかじめ予測し，その周期の区間積分の値を求めて全積分値をそれらの級数の形で表し，その和を求める演算を数値的に加速するという方法を用いた。波動方程式についてはこの方法で数値逆変換がうまく行なえる [3]。また，同じ方法が一般化 Maxwell 型の線形粘弾性体の場合にも使えることも前報で報告した [4]。

数値解析例を図に示す。三要素標準線形モデル媒質中の円孔に波が入射したときの円孔境界の変位である。





参考文献

[1] Fung, Y.C.: *Foundation of Solid Mechanics*, Chapter 15, Prentice-Hall, 1965.

[2] Achenbach, J.D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, Chapter 10, North-Holland, 1975.

[3] 福井卓雄，船戸慶輔：波動問題における周波数領域境界要素法から時間領域境界要素法への数値変換について，境界要素法論文集，第 11 巻，pp. 65-70, 1994.

[4] 福井卓雄，船戸慶輔，中江崇：粘弾性面外波動問題の境界要素法による時間ステップ解析，土木学会中部支部平成６年度研究発表会講演概要集，I-5, 1995.