

スロッシング解析のための r-法境界要素適応分割

新潟大学大学院 学生員 櫻庭庄平
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

非線形波動を Lagrange 手法により解析する場合, 自由表面上の節点の局在化により, 解の精度や安定性の低下が生ずることがある. 著者の一人は, r-法適応分割法を併用した解法を構成し, 上述の問題点の改善を試みた¹⁾. ここでは, 境界要素方程式と圧力方程式の重み付き残差式という互いに異なる方程式に対し, 各々異なる最適メッシュを求め, その重み平均により, 最終メッシュを作成するという方法を採用した. そのため, 最終メッシュでは最適という概念が曖昧なものとなっていた. 本研究では, 境界要素方程式と圧力方程式に基づく単一の最適要素配置を与える手法を構成して, その有効性を検討する.

2. 二次元非線形波動問題の離散化方程式

解析対象領域 Ω において流体を非粘性・非圧縮, その運動を非回転とすると, 場の支配方程式は速度ポテンシャル ϕ に対して Laplace 方程式で与えられる. このポテンシャル場を境界積分方程式で表し, 自由表面 Γ_f の圧力方程式を重み付き残差式で記述すると以下の式を得る.

$$\text{境界積分方程式: } c(y)\phi(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\phi(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi^*(x, y)q(x)d\Gamma \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots (1)$$

$$\text{圧力方程式: } \int_{\Gamma_f} \psi_i \left[\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta \right] d\Gamma = 0 \quad (\text{on } \Gamma_f) \quad \dots (2)$$

ここで Γ は全境界, q は流束, ϕ^* , q^* は基本解, u, v は流体粒子速度成分, g は重力加速度, η は自由水面高さである.

式 (1), (2) を一次要素により離散化し, 時間積分スキームを適用することで, 最終的な方程式系を得る²⁾.

3. r-法による適応分割

(1) 境界要素方程式

各選点における残差 R_i , ノルム $\|R\|$ および各要素での近似度を示す error indicator λ_j を以下に定義する.

$$R_i = \sum_j \lambda_{ij}, \quad (\lambda_{ij} = -c'(u - \hat{u})_i - \int_{\Gamma_j} q^*(u - \hat{u})d\Gamma + \int_{\Gamma_j} u^*(q - \hat{q})d\Gamma),$$

$$\|R\| = \int_{\Gamma} |R|d\Gamma, \quad \lambda_j = \text{Max}\{\lambda_{ij} | i = 1, \dots, N\} \quad \dots (3)$$

(3) で N は選点総数, u, q は真の解, $\hat{u}, \hat{q}$ はその線形内挿関数で, 実際には近似解に基づき評価する.

(2) 圧力方程式

各節点の残差 R_p , ノルム $\|R_p\|$, error indicator λ_{pj} を以下に定義する.

$$R_p \simeq (\hat{\Phi} - \Phi) - [\tilde{u}(\hat{u} - u) + \tilde{v}(\hat{v} - v)] + g(\hat{\eta} - \eta), \quad \Phi := \frac{D\phi}{Dt},$$

$$\|R_p\| = \left(\int_{\Gamma_j} |R_p|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_{pj} = \frac{a_j^2}{30} h_j^5 \quad \left(a_j = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \Phi}{ds^2} \Big|_j - \tilde{u}_j \frac{d^2 u}{ds^2} \Big|_j - \tilde{v}_j \frac{d^2 v}{ds^2} \Big|_j + g \frac{d^2 \eta}{ds^2} \Big|_j \right) \right) \dots (4)$$

ここで $(\hat{\cdot})$ は近似解, $(\cdot)$ は真の解を近似解と同一の内挿関数により補間した関数, h_j は要素長である.

(3) 最適要素配置の決定

自由表面では境界積分方程式と圧力方程式の互いに異なる二つの方程式を, 単一の要素分割で近似している. そこで, 両者に関するノルム (error estimator) の重み平均を汎関数として, それを最小にするものを最適要素分割とする. 上述の汎関数の停留条件及び自由表面境界長不変の条件より, 次の方程式を得る.

$$\alpha(\beta - 1)n\lambda_j \zeta_j^\beta + (1 - \alpha)2\gamma n \hat{\lambda}_j \zeta_j^{2\gamma+1} - A = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sum (\zeta_j - 1)h_j = 0 \quad (h'_j = \zeta_j h_j) \quad \dots (5)$$

ここで α は両方程式のノルムの重み係数, β, γ は収束次数, n は自由表面要素数である. この方程式を Newton-Raphson 法により ζ_j, A について解くことで再分割後の要素長 h'_j を得る. また, 壁面では境界要素方程式のみ

に関する最適要素配置を求める。

(4)r-法導入ステップの自動化

文献1)では、予め指定した時間ステップ間隔の下でr-法を適用する手法を採った。ここでは、次の手法により、r-法適応ステップの自動化を図る。

式(3),(4)に定義した indicator を各ステップの初期メッシュにおける estimator η_1, η_{p1} により規格化した値の重み平均を $H_j = \alpha \lambda_j / \eta_1 + (1 - \alpha) \lambda_{pj} / \eta_{p1}$ とし、その最大値を H_{max} 、平均値を H_{mean} とする。式(5)による最適メッシュは、全要素での H_j が等しい値をとるメッシュとして与えられる。従って、 H_{max}/H_{mean} が1に近いメッシュほど良好であると判定できる。そこで、各ステップにおいて、 H_{max}/H_{mean} がある値以上となった場合にのみ適宜 r-法を適用させる手法を採った。

4. 解析例

図-1に示す矩形容器内のスロッシング解析を行った。ここで、自由表面の初期形状は Penney & Price³⁾ によった。解析では自由表面 n 、側壁 10、底面 6 分割とし、 $\Delta t = 0.001(s)$ の下で 800Step まで計算した。 $\alpha = 0.8$ とし、 $H_{max}/H_{mean} \geq 1.5$ で r-法を適応した場合の H_{max}/H_{mean} の変動の様子を図-2に示す。図には、比較のため r-法未使用に対する結果も破線で示した。なお、太線の部分では、estimator の値自体が非常に小さく、いずれのメッシュでも相対的に良好な結果が得られるため、r-法は適用していない。図より、r-法の適用の自動化が安定に実行されていることが確かめられる。図-3は自由表面形状の誤差ノルムと自由表面分割数との関係を示したものである。いずれの要素数においても、r-法の適用により精度は向上し、またその収束次数も高くなっており、本手法適用の効果が認められる。

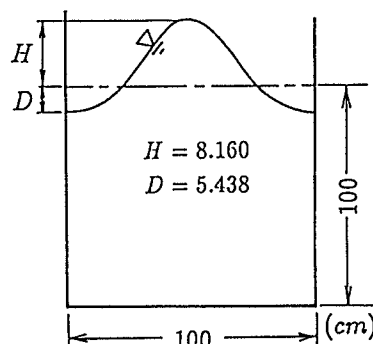


図-1 解析条件

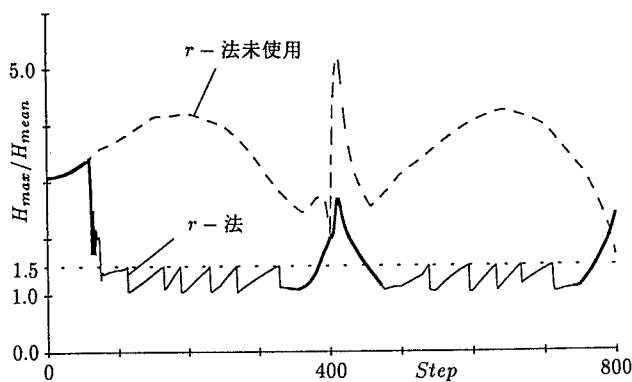


図-2 H_{max}/H_{mean} の時刻歴

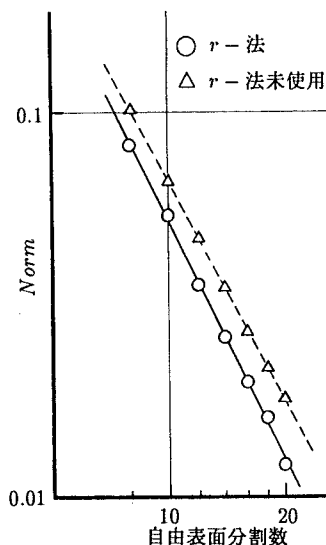


図-3 要素数とノルムの関係

参考文献

- 1) 阿部和久：構造工学における数値解析法シンポジウム論文集第 18 巻, 27-32, 1994
- 2) 阿部和久・神尾忠広：土木学会論文集, 489, 111-120, 1994
- 3) Penney, W.G and Price, A.T. : Trans.R.Soc.Lond., Ser.A, 244, pp.254-284, 1952.