

## I-204

## ボロノイ分割を用いた板曲げ問題の離散化極限解析

明星大学 正員 竹内 則雄

## 1. はじめに

一般的な3次元要素の特別な場合として誘導されたRBSMの板曲げ要素を用いた弾性解の精度は、ポアソン比の影響を無視した場合においても若干低い。しかし、これはばね定数の考え方を変えることで改善することができる。

本論文では、このばね定数の考え方を整理し、簡単な数値計算例を用いて、本要素モデルにより得られる離散化極限解析解の特性について述べる。

## 2. 面外変形平板要素の定式化

面外荷重が作用する平板要素の剛体変位場は、図1に示すよう、 $z$ 軸方向のたわみ( $w$ )と $x$ 軸、 $y$ 軸回りの剛体回転角( $\theta, \phi$ )によって表すことができる。ここで、便宜上、全体座標系( $x-y-z$ )の $z$ 軸を要素境界面に沿った局所座標系( $n-s-t$ )の $t$ 軸と一致させ、 $z$ 軸ならびに $t$ 軸の原点を、図1に示すよう、板厚方向の中心に設けるものとする。

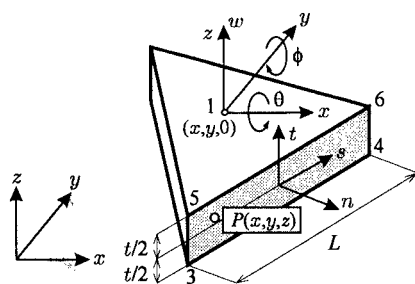


図1 面外変形平面要素

このとき、要素境界面上の相対変位は、各要素の剛体変位ならびに剛体回転角を用いて次ぎのように求めることができる。

$$\begin{aligned} \delta &= Z \cdot \delta\theta = Z \cdot B \cdot u \\ \delta\theta &= (\delta\theta_n, \delta\theta_s, \delta\theta_t)^T \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & m & -l & 0 & -m & l \\ -1 & -\Delta_{12} & \Delta_{11} & 1 & \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ 0 & -l & -m & 0 & l & m \end{pmatrix} \\ 2\Delta_{11} &= x_{41} + x_{31}, \quad 2\Delta_{12} = y_{41} + y_{31} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $l, m$  は方向余弦であり、 $\delta\theta_n$  はねじりに関する相対回転角、 $\delta\theta_s$  は曲げに関する相対回転角、 $\delta\theta_t$  は相対たわみに該当する。

一方、面内変形平面問題の場合と同様、相対変位( $\delta$ )と単位面積当たりの表面力( $\sigma$ )の間には次の関係が成立するものと仮定する。

$$\sigma = D \cdot \delta \quad (2)$$

$$\sigma = (\tau_s, \tau_t, \sigma_n)^T, \quad D = \begin{pmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

ここで、 $(\tau_s, \tau_t, \sigma_n)$  は単位面積当たりの表面力で、それぞれ、局所座標系における $s$ 軸、 $t$ 軸方向のせん断力、 $n$ 軸方向の軸力に対応する。また、 $D$  はばね行列であり、 $k_s$  はせん断に抵抗するばね、 $k_n$  は $n$ 軸方向の軸力に抵抗するばねを表している。

これらのばね定数は、実験などを参考にして求めることもできるが、ここでは、従来のRBSMと同様、平面応力状態を想定し、便宜上、次のように仮定した。

$$k_s = \frac{E}{(1+\nu)h}, \quad k_n = \frac{E}{(1-\nu^2)h} \quad (3)$$

ただし、 $h$  は各要素の自由度設定位置から要素境界面に下した垂線の高さを表すものとする。

以上から、変形後に2要素間の分布ばね系に蓄えられるエネルギーを求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_A (\delta^T \cdot D \cdot \delta) dA \\ &= \frac{1}{2} u^T \cdot B^T \int_A (Z^T \cdot D \cdot Z) dA \cdot B \cdot u \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \int_A (Z^T \cdot D \cdot Z) dA \\ &= \int_A \begin{pmatrix} \frac{EZ^2}{(1+\nu)h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{(1+\nu)h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EZ^2}{(1-\nu^2)h} \end{pmatrix} dA = I \begin{pmatrix} \frac{Et^3}{12(1+\nu)h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Et}{(1+\nu)h} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)h} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすれば、式(10)は次のように書くことができる。

$$V = \frac{1}{2} u^T \cdot B^T \cdot \bar{D} \cdot B \cdot u = \frac{1}{2} u^T \cdot K \cdot u \quad (5)$$

$$(K = B^T \cdot \bar{D} \cdot B)$$

したがって、Castiglianoの定理から、一つの接触面に対する要素剛性行列が求められる。

### 3. 数値計算例

#### (1) 弾性解析

はじめに、本要素モデルの弾性解の精度を検証する意味を含め、周辺単純支持板に等分布荷重が作用した場合の解析結果を解析解と比較する。図2には解析に用いたモデルと材料定数を示す。

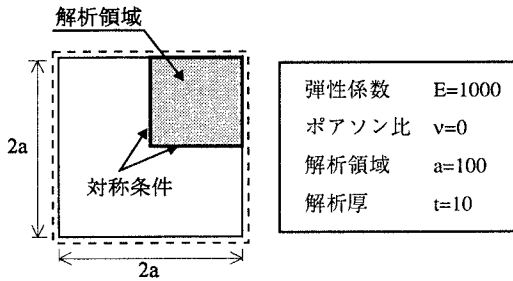


図2 解析モデル

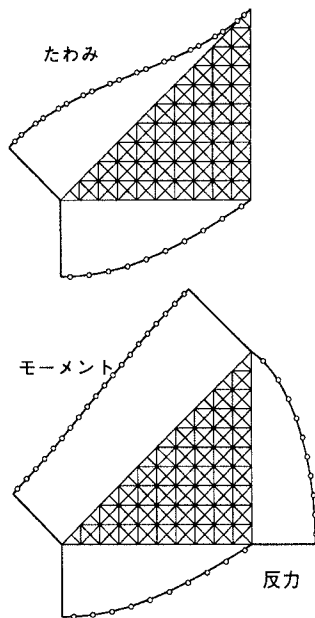


図3 弾性解析結果

図3に示すよう、本要素モデルによる解はたわみ、モーメント、反力とも解析解とほぼ一致しており、離散化極限解析を行うための初期値としては、十分精度の高い解を与えるものと思われる。

#### (2) 離散化極限解析

次に、図2に示した周辺単純支持の平板に等分布荷重が作用した場合について、極限解析解と比較するため、RBSMによる

離散化極限解析を行った。材料定数などの条件は図2と同じ値を用いている。本解析では、降伏関数に対して、全塑性曲げモーメントのみを考慮し、 $M_{pn} = 100$ とした。

図4には、無次元化された荷重-変位曲線と耐力が示されている。ここで、 $p$ は分布荷重の値を、 $w$ はたわみを表している。

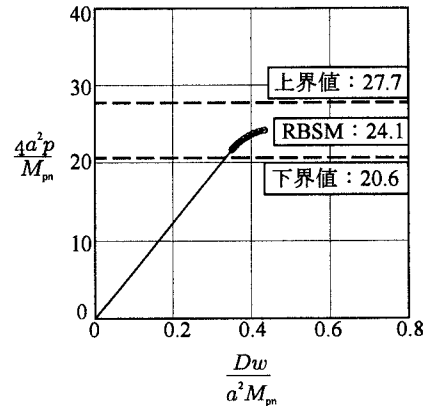


図4 周辺単純支持正方形板の荷重-変位曲線  
(26.9) (27.9)

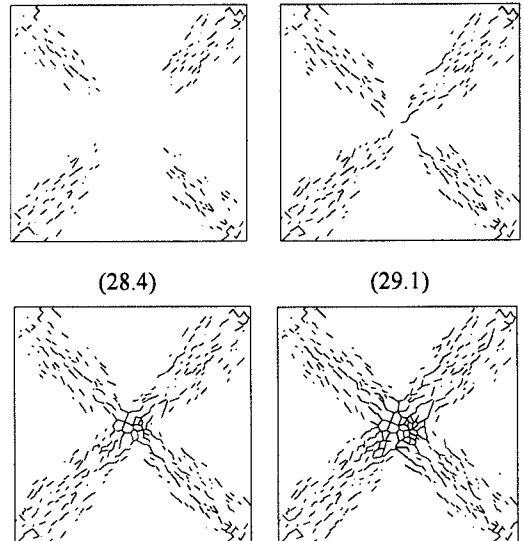


図5 ボロノイ分割を用いた離散化極限解析解

#### (3) ボロノイ分割を用いた離散化極限解析

図5はヒンジ線の進展状況を荷重ステップ毎に描いた図である。図4に示した崩壊荷重より若干大きな荷重となるが、このパターンは極限解析のために理想化された崩壊パターンと類似の傾向を与えている。

#### 4. むすび

ばね定数を修正したRBSMによる解析を行った結果、次のことが明らかとなった。(1) 本要素モデルにおいて、ポアソン比を無視した場合の弾性解はほぼ解析解と一致する。(2) RBSMによる離散化極限解析解と極限解析による上界値、下界値を比較すると、RBSMによる解は両者の中間程度の耐力を与える。