

I-203

Corotational Formulationの精度に関する考察
(2次元平面応力問題)東京電機大学 学生員 庭山孝史
東京電機大学 正員 井浦雅司

1. はじめに

幾何学的非線形問題には、これまで様々な解析手法が提案されている。それらを大別すると、Lagrange手法とEuler手法とがある。Lagrange手法に属するCorotational Formulationは、剛体変位除去の手法とも呼ばれ、剛体変位と相対変位とを区別して扱うものであり、これまで有効な手法として広く用いられている。その精度については、梁を対象として、後藤ら[1]、井浦[2]、井浦ら[3]の報告がある。本報告では、2次元平面応力問題をとりあげ、三角形定歪要素を対象として、相対変位を記述する理論に微小変位理論を適用した場合、その解が有限歪有限変位理論の解に収束するか否かを理論的に示している。さらに、数値計算例を通して、本報告の理論的結果の妥当性を明らかにする。

2. 基礎式

2次元平面応力問題において、連続体が弾性と仮定すれば、その歪エネルギーは以下のように表わされる。

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \int_A \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 + \frac{E}{2(1+\nu)} (\epsilon_{xy}^2 - 4\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}) \right] dA \quad (1)$$

ここに、 ϵ_{xx} , ϵ_{yy} は x 方向と y 方向における伸び歪、 ϵ_{xy} はせん断歪、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 A は有限要素の面積である。

x 方向の変位成分を Δx 、 y 方向の変位成分を Δy とくと、厳密なグリーンの歪と変位の関係式は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left\{ 1 + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial(\Delta y)}{\partial x} \right\}^2 - 1 \right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{\partial(\Delta x)}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ 1 + \frac{\partial(\Delta y)}{\partial y} \right\}^2 - 1 \right] \\ \epsilon_{xy} &= \left\{ 1 + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} \right\} \frac{\partial(\Delta x)}{\partial y} + \frac{\partial(\Delta y)}{\partial x} \left\{ 1 + \frac{\partial(\Delta y)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

本報告では、Fig.1に示すような移動座標系(x, y)を用いる。ここで、 x 軸は変形後の要素の2節点 i, j を結んだものであり、 y 軸はそれに直交している。 X, Y 軸は変形前の要素に関するものであり、 X_0, Y_0 軸は空間に固定された座標軸である。

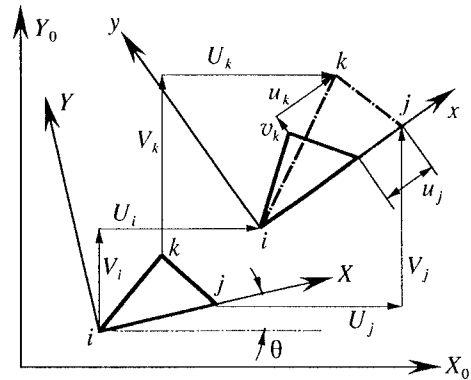


Fig.1

ここで、空間固定座標系の変位成分を $\Delta x = U$ 、 $\Delta y = V$ 、移動座標系の変位成分を $\Delta x = u$ 、 $\Delta y = v$ と置く。また、板の三角形要素の3節点 i, j, k における量を $(\)_i, (\)_j, (\)_k$ で表わすと、移動座標系の定義より、零でない変位成分は u_j, u_k, v_k となる。この変位成分と空間固定座標系における変位成分との関係式は、Fig.1より以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} u_j &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} - l \\ u_k &= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{l + u_j} - m \\ v_k &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} - (m + u_k)^2 - n \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、

$$\begin{aligned} A_1 &= m \cos(\theta) - n \sin(\theta) + U_k - U_i \\ A_2 &= l \cos(\theta) + U_j - U_i \\ B_1 &= m \sin(\theta) + n \cos(\theta) + V_k - V_i \\ B_2 &= l \sin(\theta) + V_j - V_i \end{aligned} \quad (4)$$

である。また、 l, m, n はそれぞれ、変形前の三角形要素の2節点 i, j を結んだ長さ、2節点 i, k を結んだ長さの X 軸方向成分、2節点 i, k を結んだ長さの Y 軸方向成分である。

3. Corotational Formulationの精度

本報告では、Corotational Formulationの精度を調べる方法として、基本的には文献[2]と同じ方法を用いる。

まず、移動座標系において線形理論より得られる歪成分に、一次の変位関数を代入して得られる歪と、空間固定座標系において厳密な理論より得られる歪成分に、一次の変位関数を代入して得られる歪とを比較することにより、Corotational Formulationによる数値解の精度を調べる。なお、以下においては $\theta = 0$ とされているが、これは精度を調べる上で何ら一般性を損なうものではない。

まず、移動座標系における変位を一次関数で表わすと以下ようになる。

$$u = \frac{1}{l}u_j x + \frac{1}{n}(u_k - \frac{m}{l}u_j)y, \quad v = \frac{1}{n}v_k y \quad (5)$$

よって、近似された歪と変位の関係式は、式(2)の高次項を無視して以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^* &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{l}u_j, & \epsilon_{yy}^* &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{n}v_k \\ \epsilon_{xy}^* &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{n}(u_k - \frac{m}{l}u_j) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $()^*$ は近似された歪であり、式(3)を代入することによって、全体座標系から見た変位成分で表わすことができる。

次に、空間固定座標系における変位を一次関数で表わすと以下ようになる。

$$\begin{aligned} U &= U_i + \frac{1}{l}(U_j - U_i)X_0 \\ &\quad + \frac{1}{n}\{(U_k - U_i) - \frac{m}{l}(U_j - U_i)\}Y_0 \\ V &= V_i + \frac{1}{l}(V_j - V_i)X_0 \\ &\quad + \frac{1}{n}\{(V_k - V_i) - \frac{m}{l}(V_j - V_i)\}Y_0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)を式(2)へ代入することにより、厳密な歪と節点変位との関係が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l^2}(A_2^2 + B_2^2) - 1 \right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n^2} \left\{ (A_1 - \frac{m}{l}A_2)^2 + (B_1 - \frac{m}{l}B_2)^2 \right\} - 1 \right] \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{ln} [A_2(A_1 - \frac{m}{l}A_2) + B_2(B_1 - \frac{m}{l}B_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

式(3)を用いて、式(6)と式(8)とを比較することにより、近似された歪と厳密な歪との関係が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^* + \frac{1}{2}(\epsilon_{xx}^*)^2 \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{yy}^* + \frac{1}{2}(\epsilon_{yy}^*)^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{xy}^*)^2 \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{xy}^*(1 + \epsilon_{xx}^*) \end{aligned} \quad (9)$$

有限要素数を増加したときに、上記の ϵ_{xx} 、 ϵ_{yy} 、 ϵ_{xy} が厳密な歪に収束していくものと仮定すれば、常に式(9)が成立することにより、 ϵ_{xx}^* 、 ϵ_{yy}^* 、 ϵ_{xy}^* は厳密な歪に収束しないことがわかる。三角形定歪要素の収束性が悪い

ことは知られているが、要素数を増加していくことにより、その解は厳密解に近づくことから、 ϵ_{xx}^* 、 ϵ_{yy}^* 、 ϵ_{xy}^* は厳密な歪に収束しないという結論が得られた。すなわち、三角形定歪要素を用いたとき、移動座標系において線形理論を用いた有限要素解は、要素数を増加させても厳密な解に収束しないことがわかる。

4. 数値計算例

ここでは、Fig.2に示す例題を考える。対称性から系の半分を取り上げ、用いた要素数は20と40である。荷重と荷重点直下のたわみの関係をFig.3(要素数20)とFig.4(要素数40)に示す。ここに、実線は ϵ による値、点線は ϵ^* による値である。

図より、両者の値の差は荷重が大きくなるにつれ広がることがわかり、本理論による結論の妥当性が確認された。

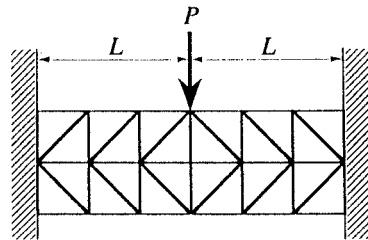


Fig.2

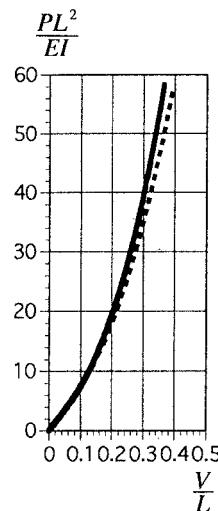


Fig.3

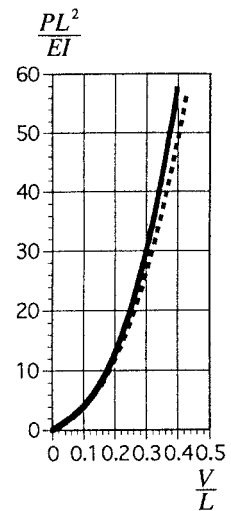


Fig.4

5. 参考文献

- [1]Goto,Y., Hasegawa,A. and Nishino,F., Proc. of JSCE, No.344/I-1, 1984.
- [2]井浦, 構造工学論文集, Vol.40A, 1994.
- [3]井浦, 古田, 構造工学論文集, Vol.41A, 1995.