

I-202

一様な側圧を受ける境界条件が上端自由下端単純支持された 薄肉円筒シェルの座屈固有値解析

武蔵工業大学 学生員 ○華鉢 文裕

武蔵工業大学 正会員 増田 陳紀

武蔵工業大学 正会員 西脇 威夫

1. はじめに

側圧を受ける円筒シェルの座屈に関する既往の研究には、直線的に変化する側圧を受ける円筒シェルに関し、上下端単純支持の境界条件で座屈荷重を求めたものがある¹⁾。しかし、海中に埋設される円筒シェルケーソンなどを想定した場合、上述の境界条件に対する検討のみでは十分とはいえず、上端部と下端部で異なる境界条件を有する円筒シェルについても検討する必要がある。本研究では、上端部と下端部で異なる境界条件の1つとして、上端自由下端単純支持の条件を取り上げ、一様な側圧を受ける円筒シェルを対象とし、エネルギーの停留原理を用いて同次方程式を導き、固有値問題として座屈荷重を求める。上端自由下端単純支持された円筒シェルの座屈波形では、有限要素解析の結果から上下端単純支持の場合とは異なり、円周方向の変位の分布が軸方向に変化する可能性のあることが指摘されている²⁾。このため、変位の仮定では、周方向と軸方向との練成を考慮し級数展開を用いる必要があるため、かなり高次の固有値問題を扱うこととなる。このため、系統的な係数行列作成手法³⁾を用いて解析を行う。

2. 変位式の仮定と構造諸元

上述した点をふまえて、変位式を式(1)のように仮定する。式中の u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の変位であり、 m, n はそれぞれ周方向波数、軸方向波数を意味する。また、 k は未定係数であり、上付き添字の u, v, w はそれぞれ u, v, w の未定係数であることを、 $1, 2$ はそれぞれ $\sin, \cos$ の未定係数であることを示している。また、座標系、構造諸元を図-1に示す。ここで L, R, t はそれぞれ円筒の高さ、半径、及び板厚である。

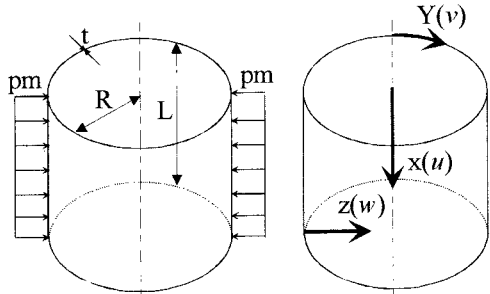


図-1 構造諸元と座標系

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=0}^i \sum_{n=1}^j \left\{ k_{mn}^{(u1)} \sin\left(\frac{m}{R}y\right) + k_{mn}^{(u2)} \cos\left(\frac{m}{R}y\right) \right\} \cos\left(\frac{(n+1)L-nx}{2L}\pi\right) = \sum_{m=0}^i \sum_{n=1}^j \left\{ k_{mn}^{(u1)} u_{mn}^{(u)} + k_{mn}^{(u2)} u_{mn}^{(u')} \right\} \\
 v &= \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j \left\{ k_{mn}^{(v1)} \sin\left(\frac{m}{R}y\right) + k_{mn}^{(v2)} \cos\left(\frac{m}{R}y\right) \right\} \cos\left(\frac{(n+1)L-nx}{2L}\pi\right) = \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j \left\{ k_{mn}^{(v1)} v_{mn}^{(v)} + k_{mn}^{(v2)} v_{mn}^{(v')} \right\} \\
 w &= \sum_{m=0}^i \sum_{n=1}^j \left\{ k_{mn}^{(w1)} \sin\left(\frac{m}{R}y\right) + k_{mn}^{(w2)} \cos\left(\frac{m}{R}y\right) \right\} \cos\left(\frac{(n+1)L-nx}{2L}\pi\right) = \sum_{m=0}^i \sum_{n=1}^j \left\{ k_{mn}^{(w1)} w_{mn}^{(w)} + k_{mn}^{(w2)} w_{mn}^{(w')} \right\} \dots (1)
 \end{aligned}$$

3. 全ポテンシャルエネルギー

全ポテンシャルエネルギーの式を導くまでの過程は、植村・森田¹⁾と同様に、座屈前のひずみは円形断面を保ったまま軸対称変形を生じるものとし、座屈後は変形前の状態を基準として、周方向に波を生じつつ半径方向にたわんだときの付加の変位成分を仮定して求める。全ポテンシャルエネルギーの式を以下に示す。ただし式中の下付き添字はその文字に関する偏微分を意味する。

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \left[\frac{Et}{2(1-\nu^2)} \right] \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[u_x^2 + v_y^2 + \left(\frac{w}{R} \right)^2 + 2\nu u_x v_y - 2\nu u_x \left(\frac{w}{R} \right) - 2v_y \left(\frac{w}{R} \right) \right] dx dy \\
 &+ \left[\frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \right] \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[w_{xx}^2 + \left(w_{yy} + \frac{w}{R^2} \right)^2 + 2\nu w_{xx} \left\{ w_{yy} + \left(\frac{w}{R^2} \right) \right\} + 2(1-\nu) w_{xy}^2 \right] dx dy + \left[\frac{Et}{4(1+\nu)} \right] \int_0^{2\pi R} \int_0^L (u_y + v_x)^2 dx dy \\
 &- \frac{p}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[2v_y + R \left\{ \left(\frac{v}{R} \right) + w_y \right\}^2 - \left\{ \frac{v^2}{R} + \frac{w^2}{R} + w_x u + w_y v - v_y w - u_x w \right\} \right] dx dy \dots (2)
 \end{aligned}$$

4. 係数行列の作成

全ポテンシャルエネルギー Π は変位成分に関する二次式で表される。式(2)に式(1)を代入し、未定係数に対する停留条件を求めれば、未定係数についての同次方程式が得られる。同次方程式の係数行列を式(3)のように小行列に分け、それぞれの小行列についてその成分を直接的に求める³⁾

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial k_{mn}^{(u1)}} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_{mn}^{(u2)}} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_{mn}^{(v1)}} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_{mn}^{(v2)}} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_{mn}^{(w1)}} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial k_{mn}^{(w2)}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{mn}^{(u1)} \\ k_{mn}^{(u2)} \\ k_{mn}^{(v1)} \\ k_{mn}^{(v2)} \\ k_{mn}^{(w1)} \\ k_{mn}^{(w2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{mn}^{(u1)} &= (k_{11}^{(u1)}, k_{12}^{(u1)}, \dots, k_{m1}^{(u1)}, \dots)^T, k_{mn}^{(u2)} = (k_{11}^{(u2)}, k_{12}^{(u2)}, \dots, k_{m1}^{(u2)}, \dots)^T \\ k_{mn}^{(v1)} &= (k_{11}^{(v1)}, k_{12}^{(v1)}, \dots, k_{m1}^{(v1)}, \dots)^T, k_{mn}^{(v2)} = (k_{11}^{(v2)}, k_{12}^{(v2)}, \dots, k_{m1}^{(v2)}, \dots)^T \\ k_{mn}^{(w1)} &= (k_{11}^{(w1)}, k_{12}^{(w1)}, \dots, k_{m1}^{(w1)}, \dots)^T, k_{mn}^{(w2)} = (k_{11}^{(w2)}, k_{12}^{(w2)}, \dots, k_{m1}^{(w2)}, \dots)^T \end{aligned}$$

... (3)

5. 解析結果

上述した方法にて、一様な側圧を受ける上端自由下端単純支持された円筒シェルの解析を行った。構造諸元は表-1に示す4通りとした。ただし、ヤング率を $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比を $\nu=0.3$ とした。ここでは、第一段階として軸方向に取り込む項数を1で固定し、周方向に取り込む項数を増やしたときの最小固有値をプロットしたものを、図-2に示す。固有値は、ハウスホルダー法とバイセクション法を用いて求めた。

6. おわりに

上端自由下端単純支持された円筒シェルの座屈荷重値の理論解がないため、同様の解析手法を用いて一様な側圧を受ける上下端単純支持された円筒シェルの解析結果と、植村・森田の解を比較し、本手法の妥当性を示す。解析対象は表-1の4種類である。図-3は軸方向に取り込む項数を1で固定し、周方向に取り込む項数を増やしたときの最小固有値をプロットしたものである。また表-2は、植村・森田の解析結果と今回の解析結果を比較したもので、括弧内は座屈波数である。植村・森田の解析では、変位の仮定に級数展開を用いていない為、座屈荷重値に若干の違いがあるが、境界条件が上下端単純支持の解析解¹⁾と本解析結果とがほとんど一致しており本解析手法の妥当性が確認できた。また、上端自由の場合の座屈荷重値は、上下端単純支持のそれより低くなっており、妥当な傾向を示している。

参考文献

- 植村益次・森田道子：直線的に変化する外圧による円筒殻の座屈，日本機械学会論文集，37巻，298号，pp.1100-1106,1971.6.
- 増田陳紀・西脇威夫・長野克哉・小川研一：静水圧を受ける薄肉弾性円筒シェルの座屈荷重と境界条件の影響，構造工学論文集，第39A，pp.285-293,1993
- 増田陳紀・西脇威夫・小川研一・伊藤俊：側圧を受ける薄肉弾性円筒シェルの座屈固有値解析のための系統的係数行列作成手法とその応用，日本鋼構造協会，構造工学における数値解析シンポジウム論文集，第17巻，pp.185-190,1993.7

表-1 解析対象の構造諸元

	L (cm)	R (cm)	t (cm)
CASE 1	5000	500	1
CASE 2	1000	500	1
CASE 3	500	500	1
CASE 4	250	500	1

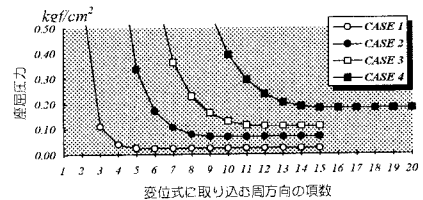


図-2 上端自由下端単純支持の解析結果

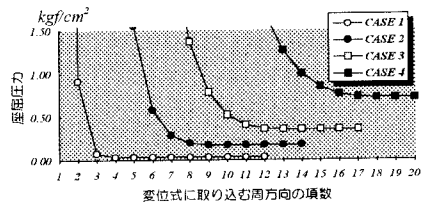


図-3 上下端単純支持の解析結果

表-2 解析結果の比較 (kgf/cm²)

	植村・森田の解	上下端単純支持	上端自由下端単純支持
CASE 1	0.0340 (4)	0.0345 (4)	0.0232 (6)
CASE 2	0.1768 (9)	0.1756 (9)	0.0683 (10)
CASE 3	0.3654 (13)	0.3544 (13)	0.1100 (12)
CASE 4	0.7791 (18)	0.7206 (18)	0.1827 (15)