I －197

偏平殻の幾何学的非線形問題に関する解析法

東和大学　正員　若菜啓孝
新構造技術（株）　正員　小沼恵太郎
長崎大学　工学部　正員　崎山毅
長崎大学　工学部　正員　松田浩
長崎大学　工学部　正員　森田千尋

1.　まえがき

著者らの一部は、相対する２辺が単純支持された偏平殻の曲げおよび自由振動問題を解析する手法について検討してきた。この解析法では，まず一軸方向にはりの固有関数を仮定し，連立偏微分方程式で表された偏平殻に関する基礎微分方程式を連立常微分方程式へと転化する。次に，この連立常微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより得られる解析的近似解を求める手法である。本研究はその解析法を応用して、偏平殻の幾何学的非線形解析を行うものである。

2.　増分形での偏平殻の大たわみ式

曲面の x,y 方向の曲率をκ_x,κ_yとし，これらがあまり大きくなく投影形状が矩形の曲面板を考える．板厚中央面に対して接線方向の変位成分をu,v，および垂直方向の変位をwとし，面内力をN_x,N_y,N_{xy}，換算せん断力をV_x,V_y，曲げモーメントをM_x,M_y，ねじりモーメントM_{xy}，たわみ角をθ_xとする。
せん断変形を無視できる程度の板厚を仮定した場合，偏平殻の有限変形に関する基礎微分方程式は，増分形で表すと次式のようになる。

$$\frac{\partial \Delta V_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta V_y}{\partial y}-(\kappa_x+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})\Delta N_x-(\kappa_y+\frac{\partial w}{\partial y})\Delta N_y+\Delta q_z^*-\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}N_x-\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}N_y$$
$$-2\frac{\partial \Delta\theta_x}{\partial y}N_{xy}-2\frac{\partial w}{\partial y}\Delta N_{xy}-\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}\Delta N_x-\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2}\Delta N_y-\frac{\partial \Delta\theta_x}{\partial y}\Delta N_{xy}=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y}+\Delta V_x=0 \qquad (1.2) \qquad\qquad \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y}+\Delta V_y=0 \qquad (1.3)$$
$$\frac{\partial \Delta\theta_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2}-\frac{\Delta M_x}{D}=0 \qquad (1.4) \qquad\qquad \frac{\partial \Delta w}{\partial x}-\Delta\theta_x=0 \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x}+\frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y}+\kappa_x\Delta V_x+\Delta q_x^*=0 \qquad (1.6) \qquad\qquad \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y}+\kappa_y\Delta V_y+\Delta q_y^*=0 \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x}+\nu\frac{\partial \Delta v}{\partial y}+(\kappa_x+\nu\kappa_y)\Delta w+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\right)^2+\nu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y}\right)^2-\frac{1-\nu^2}{Eh}\Delta N_x=0 \quad (1.8)$$
$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y}+\nu\frac{\partial \Delta u}{\partial x}+(\kappa_y+\nu\kappa_x)\Delta w+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y}\right)^2+\nu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial x}+\frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\right)^2-\frac{1-\nu^2}{Eh}\Delta N_y=0 \quad (1.9)$$
$$\frac{\partial \Delta v}{\partial x}+\frac{\partial \Delta u}{\partial y}+2\kappa_{xy}\Delta w+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial y}+\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial y}-\frac{2(1+\nu)}{Eh}\Delta N_{xy}=0 \qquad (1.10)$$

いま、y=0 および y=b が単純支持であることを考慮して、たわみおよび断面力を次のように仮定する。

$$N_{xy}=\sum_m N_{xy}(x)\cos\alpha_m y \quad ,N_x=\sum_m N_x(x)\sin\alpha_m y \quad ,Q_x=\sum_m Q_x(x)\sin\alpha_m y \quad ,M_x=\sum_m M_x(x)\sin\alpha_m y$$
$$u=\sum_m u(x)\sin\alpha_m y \quad ,v=\sum_m v(x)\sin\beta_m y \quad ,w=\sum_m w(x)\sin\alpha_m y \quad ,\theta_x=\sum_m \theta_x(x)\sin\alpha_m y$$

ただし、$\alpha_m=(2m-1)\pi/b \quad \beta_m=2m\pi/b \qquad (m=1,2,\ldots,n)$

さらに無次元量X_tおよび無次元座標ηを導入する。

$$X_1=\frac{a^2 N_{xy}}{D_0(1-\nu^2)} \quad ,X_2=\frac{a^2 N_x}{D_0(1-\nu^2)} \quad ,X_3=\frac{a^2 Q_x}{D_0(1-\nu^2)} \quad ,X_4=\frac{aM_x}{D_0(1-\nu^2)}$$
$$X_5=\frac{u}{a} \quad ,X_6=\frac{v}{a} \quad ,X_7=\frac{w}{a} \quad ,X_8=\theta_x \quad ,\eta=\frac{x}{a}$$

これらより基礎微分方程式は、次のごとく整理縮小される。

$$\frac{dX_t}{d\eta}=\lambda\sum_{k=1}^{9}G_{tk}X_k \qquad (t=1\sim 8, X_9=1)\ \cdot (1)$$

ここに、$\lambda=x/a$、G_{tk}は断面力および変位の係数である。
座標原点を左端境界線にとり、変域 $[0,\eta]$ で積分すれば、次の積分方程式が得られる。

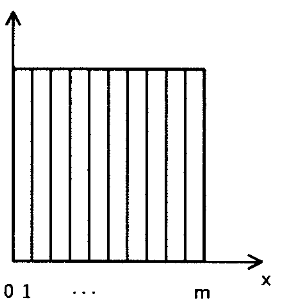

図１．離散点

$$X_t(\eta)=X_t(0)+\int_0^{\eta}\lambda\sum_{k=1}^{9}G_{tk}(\xi)X_k(\xi)d\xi \quad \cdots\cdots (2)$$

積分方程式に、等間隔の数値積分法（Simpson の台形公式）を繰り返し適用することにより、板を m 等分した場合の分割点 i における X_tの離散的な一般解が求められ、次式となる。

$$X_{pi}=\sum_{d=1}^{8}\left(\sum_{t=1}^{8}A_{pt}a_{t0d}+\sum_{t=1}^{8}\sum_{k=0}^{i-1}\beta_{ik}B_{pt}a_{tkd}\right)X_{d0} \qquad ,a_{d0d}=1.0(d=1\sim 8) \quad \cdots\cdots (3)$$

ここに、 β_{ik} は数値積分法による重み係数である。

3. 積分定数と境界条件

式（3）は、偏平殻の離散表示された離散解である。この式に含まれる左端境界線要素における諸量 X_{d0}はいわゆる積分定数であり、具体的には断面力および変形量を表し、８個存在するが、偏平殻の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか４個の積分定数は既知となり残りの未知なる積分定数は、対辺の境界条件によって決定される。また、i 番目の線要素に対応する諸量 X_{pi}を積分定数 X_{d0}に関係づける要素 a_{pid}は、伝達マトリックス法における伝達マトリックスに相当するものである。

4. 数値計算例および結論

本解析法による数値解の精度を明らかにするために、既往の解析結果とともに図２に示す。
解析対象は板厚 $t/a=0.01$、曲率半径 $R=10a,8a,5a$ の偏平円筒殻であり、境界条件は４辺単純支持（面内変位不動）である。同図において実線は、文献(2)によるＦＥＭ解（自由度１１１）を示すがいずれの曲率半径においても、本法（自由度１２）による幾何学的非線形解析結果はよく一致している。また、本法は他辺の境界条件においては、自由な組み合わせが解析可能であり、その他の曲率半径を有する偏平殻の解析とともに講演当日に発表する。

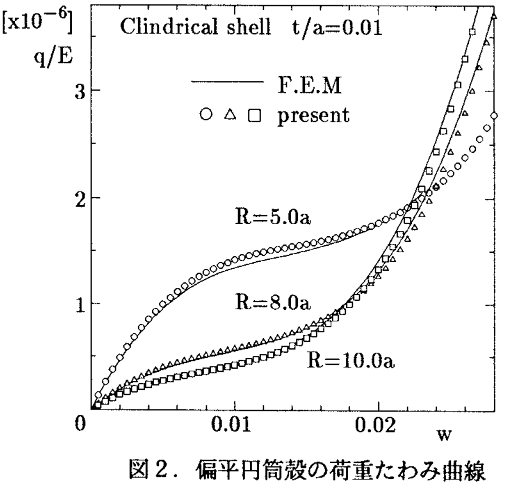

図２．偏平円筒殻の荷重たわみ曲線

参考文献
1) 若菜啓孝、崎山毅、松田浩、森田千尋: 偏平殻の曲げおよび自由振動問題に関する一解析法, 第 14 回数値解析法シンポジウム論文集,1993
2) 福地信義、若菜啓孝、杉田憲彦: 板殻構造の弾塑性大撓み挙動に関する解析, 西部造船会会報, 第 78 号,1988
3) 森田千尋、松田浩、崎山毅、川神雅秀: 変厚偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析, 構造工学論文集,Vol.40A,1994