

I-194

等価介在物法に基づいた弾塑性有限要素解析手法

鹿島建設 正員 ○安部 剛史 九州工業大学 正員 山口 栄輝
 東京大学 正員 堀 宗朗 九州工業大学 正員 久保 喜延

1. はじめに 一般に、構造物の弾塑性解析は大量の計算時間を必要とする。しかしながら、その一方で、塑性域が広範囲に広がるまでの計算を必要としない場合も多い。平面骨組構造物を対象に、この点を利用して計算時間の短縮をはかる弾塑性解析法を著者らは先に提案している¹⁾。本研究では、その解析法を拡張し、一般の固体を対象にした弾塑性解析手法を提案する。

2. 定式化および解析手順 弾塑性問題は、基本的には、次の方程式で表される増分境界値問題である²⁾。

$$\text{つり合い式} \quad \dot{\sigma}_{ij,j} + \bar{F}_i = 0 \quad (1)$$

$$\text{ひずみ-変位関係式} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2)$$

$$\text{構成式} \quad \dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3)$$

$$\text{境界条件} \quad \bar{l}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j, \quad \bar{u}_i = \dot{u}_i \quad (4)$$

ここに、 $\dot{\sigma}_{ij}$ 、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 、 $\bar{F}_i$ 、 $\dot{u}_i$ 、 $\bar{l}_i$ はそれぞれ応力増分、ひずみ増分、物体力増分、変位増分、表面力増分である。また n_j は境界面に立てた外向き単位法線ベクトル、 D_{ijkl}^{ep} は弾塑性テンソルである。

2.1 従来の解析法 式(1),(2),(4)より次の仮想仕事式が導かれる。

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \bar{F}_i \delta \dot{u}_i dV + \int_S \bar{l}_i \delta \dot{u}_i dA \quad (5)$$

ここで、 $\delta \dot{u}_i$ 、 $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$ は仮想変位増分および仮想ひずみ増分である。式(3)を代入し、アイソパラメトリック要素を用いて式(5)を離散化すれば、次式が得られる。

$$\left[\int_V N_{,l}^b D_{ijkl}^{ep} N_{,j}^a dV \right] \dot{U}_k^b = \int_V \bar{F}_i N^a dV + \int_S \bar{l}_i N^a dA \quad (6)$$

上式左辺の括弧内は剛性マトリクス、右辺は外力ベクトルである。従来の解析法では、各荷重ステップにおいて式(6)の連立一次方程式を解き、変位等を更新することにより弾塑性解析を行うことになる。

2.2 等価介在物法を適用した解析法

(1)基礎概念 等価介在物法は、不均質材料を均質材に置き換えて解析する方法で、問題の等価性を保証するためにアイゲンひずみを導入する³⁾。等価介在物法を増分境界値問題に適用する際には、式(3)の構成式を次式で置き換える。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e (\dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\epsilon}_{kl}^*) \quad (7)$$

ここに、 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ はアイゲンひずみ増分である。式(7)を式(5)に代入した上で、前節と同様の離散化を行えば次の有限要素方程式を得る。

$$\left[\int_V N_{,l}^b D_{ijkl}^e N_{,j}^a dV \right] \dot{U}_k^b = \int_V \bar{F}_i N^a dV + \int_S \bar{l}_i N^a dA + \int_V \dot{F}_i^* N^a dV \quad (8)$$

ここで、左辺括弧内の剛性マトリクスは弾性挙動時のものであり、塑性変形が生じても変化しない。右辺の $\dot{F}_i^*$ は等価節点アイゲン力増分で、アイゲンひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ の線形関数となる。 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ が求められれば、式(8)より節点変位増分 $\dot{U}_k^b$ は直ちに計算できる。この計算は各荷重段階で行うことになるが、剛性マトリクスが変化しないため、計算時間を低減する工夫が容易に行える。

(2)アイゲンひずみの求め方 問題の等価性を保つには、次式を満たす必要がある。

$$D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} = D_{ijkl}^e (\dot{\epsilon}_{kl} + \dot{\epsilon}_{kl}^*) \quad (9)$$

$\dot{\epsilon}_{kl}^*$ はこの式より決定することになる。 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は、外力増分 $\dot{P}_k$ と $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ により、次のように表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = G_{ijk} \dot{P}_k + H_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^* \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入すれば、 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ に関する連立一次方程式が得られ、この方程式より $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ が定まる。弾塑性解析においては、 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ は塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{kl}^p$ と関係し、さらに流れ則を用いれば、次式が得られる。

$$\dot{\epsilon}_{kl}^* = -\dot{\epsilon}_{kl}^p = -\dot{\lambda}(\partial g / \partial \sigma_{ij}) \quad (11)$$

ここに、 g は塑性ポテンシャルである。式(11)を式(10)に代入すれば、 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ に関する連立一次方程式が、 $\dot{\lambda}$ の方程式に書き換えられる。これは、未知数の減少を意味しており、計算時間が短縮される。この点に鑑み、本研究では、 $\dot{\lambda}$ を基本未知数とし、 $\dot{\epsilon}_{kl}^*$ は式(11)を用いて算出する。なお、この連立方程式は塑性域内のみで作成されるため、方程式の数は塑性域の広さに比例する。

3. 数値計算例 提案する解析法の有効性を検討するために、2孔を有する板(図1)の平面応力解析を行った。この板は、ヤング率 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、弾性限界 $\sigma_e = 200$ MPa、単軸塑性ひずみ式 $\epsilon^p = (\sigma/7)^3 / 3.0 \times 10^6$ の特性を有する J_2 -材からなると仮定した。また板厚は1.0cm、荷重条件はy軸方向の単純引張とした。対称性を利用し、1/4領域を8節点四角形要素と6節点三角形要素でモデル化した(図2)。計算結果として、塑性領域の代表点であるI点の荷重-変位曲線を図3に、また塑性域の広がりを図4に示している。この計算は、従来法と提案する解析法の両方で行ったが、全く同じ結果が得られた。

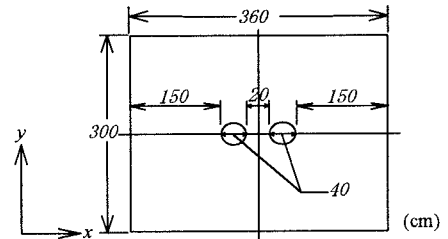


図1 2孔を有する板

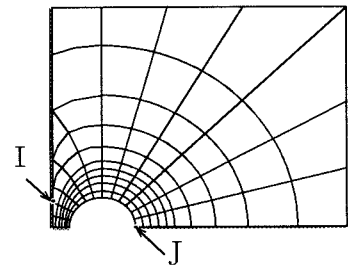


図2 要素分割

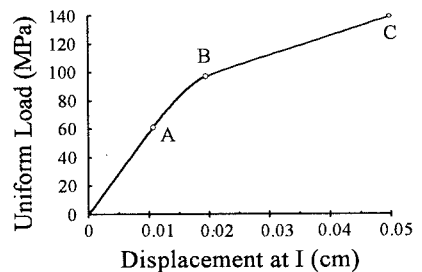


図3 荷重-変位曲線

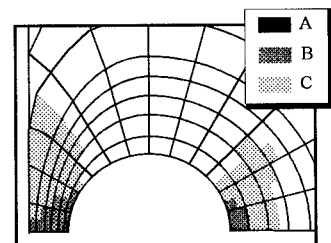


図4 塑性域

4. 考察 等価介在物法を適用した解析法の大きな利点の一つは、計算速度にある。上記の計算を例にとると、本解析法ではC点(図3)においてさえ、108元連立一次方程式を解けばよいのに対し、従来の方法では、解析初期段階から651元連立一次方程式を解く必要がある。計算速度を具体的に比較するために、C点にいたるまでのCPU時間を測定した。本研究では荷重増分法で計算を行ったが、精度良い結果を得るには十分に小さな増分値を用いる必要がある。そこで、ここでは、塑性域内の代表点としてI点とJ点を取り上げ、これらの点の変位が3桁まで正しくなるような荷重の増分値を用いて計算を行うこととした。この計算に要したCPU時間は、従来法が1168秒であるのに対し、本解析手法では191秒に過ぎず、大幅な計算時間の減少が確認された。

《参考文献》

- 1) 山口栄輝 他：等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析，構造工学論文集，Vol. 41A 1995. 3.
- 2) 北川浩：塑性力学の基礎，日刊工業新聞社，1979.
- 3) Nemat-Nasser, S. and Hori, M. : Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials, North-Holland, Netherlands, 1993.