土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

Ｉ－193

ディジェネレイション法による６節点ティモシェンコ梁要素について

九州工業大学　正員　山口栄輝
埼玉大学　　　正員　西野文雄
九州工業大学　正員　久保喜延

１．はじめに

有限要素法で構造解析を行う場合，連続体として構造物をモデル化して計算を行うことも可能であるが，一般には不経済となる．このため，梁の解析に連続体要素（ソリッド要素）を用いることは，特別な場合を除いては行われず，何らかの形で梁理論の仮定を取り込んだ解析が行われている．そのような解析法には，古典解法（classical approach）とディジェネレイション法（degeneration approach）の２つのアプローチがある[1]．前者は，梁理論の支配方程式を用いて有限要素法の定式化を行うものである．これに対し，基礎方程式には連続体の支配方程式を用い，有限要素法で離散化する段階において梁理論の仮定を適用するのが，ディジェネレイション法である．この手法により開発された要素に，図－１の６節点ティモシェンコ梁要素（Ｂ６要素）がある[2),3)]．すでにこの要素を用いていくつかの数値解析が行われ，精度良い解が得られている．しかし，要素自体の挙動に関する詳しい検討は行われていない．そこで本研究では，まずＢ６要素の特徴を簡単に記し，次いでそれらの点について考察を加える．

２．Ｂ６要素

ティモシェンコ梁理論の基本仮定に断面の平面保持がある．四辺形要素を用いて平面保持の仮定を満たすには，梁軸直角方向の形状関数を１次多項式とすればよい．この観点から提案されているのが，Ｂ６要素である．この要素の特徴として，次の３点が挙げられる．

(1) 相対節点

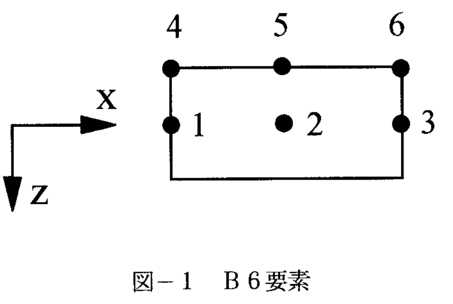
Ｂ６要素では，３節点が梁軸線上に，残りの３節点が上縁に位置している．上縁の節点は相対節点と呼ばれ，同じ断面内にある軸線上の節点との相対値を節点値としてとる．この要素は回転角を節点自由度に持たず，相対節点が代わりの役割を果たしている．

(2) 選択的次数低減積分

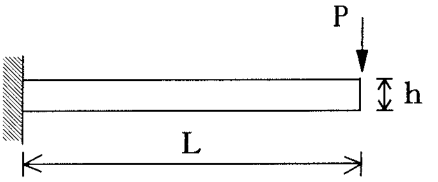
Ｂ６要素の剛性マトリックスは数値計算で算出することになり，ガウス積分が用いられる．せん断変形に関する項を厳密に積分するには3x2のスキームが必要となるが，これではせん断ロッキングが起こり，よい結果が得られない．この問題を解決するために，せん断項に関する積分スキームを2x2とした選択的次数低減積分が用いられている．

(3) 仮想剛性

梁理論においては，梁の軸線直角方向の直応力が無視される．しかしながら，Ｂ６要素を用いる際にこの直応力を完全に無視すると，数値計算上，問題の生じることがある．このため，軸線直角方向に仮想剛性の導入がなされている．仮想剛性はあくまで数値計算を安定させるためのものであり，その値が計算結果に及ぼす影響は非常に小さい．通常はヤング率程度の値を与えれば良い．



図－１　Ｂ６要素



図－２　片持梁

３．数値計算例と考察

計算例として図－２の片持梁を取り上げた．この梁を１要素でモデル化し，h/L ＝ 0.01，0.001，0.0001，0.00001 の場合について計算した．なお，ここでは Sun SPARCstation 2 を使用し，倍精度で計算を行った．

得られた節点変位を厳密解[4]と比較したが，h/L＝ 0.00001 で0.001%の誤差が出るものの，それ以外では，１要素のみを用いた解析であるにもかかわらず，厳密解と完全に一致した解を得ることができた．桁高の非常に低い梁でも高精度の解が得られるのは，相対節点の採用にあると考えられる．桁高が低くなると，通常の要素では同じ断面内の２節点間で差が小さくなり，有限桁数しか扱えない計算機では数値計算上の困難が生じる．これに対し，相対節点を導入すると，差を節点値としてとるため，非常に小さな差まで計算機内で認識でき，問題が少なくなる．この点を検証するために，通常の６節点アイソパラメトリック四辺形要素でも解析を行った．この場合，h/L ＝ 0.001 で誤差が生じており，h/L ＝ 0.0001 では厳密解とは全く異なった解となった．

ディジェネレイト要素における選択的次数低減積分の有用性はかなり以前より知られており，現在では，混合法との関連でその理由付けがなされている[5]．これに対しここでは，より直接的な方法で選択的次数低減積分の必要性を考えた．すなわち，Ｂ６要素の各節点で厳密解が与えられたときに生じるひずみ場を求めて検討を行った．その結果，梁軸方向の直ひずみ場は梁理論と完全に一致したが，せん断ひずみについては，2x2のガウス点においてのみ梁理論の値に等しくなることが判明した．Ｂ６要素で選択的次数低減積分を採用しなければならないのは，このことに起因していると考えられる．

仮想剛性は数値計算を安定させるためのものである．特に曲線梁において，この剛性を無視すると妥当な結果が得られなくなるが，これは，梁軸直角方向に大きな変形が生じること，すなわち断面形状が大きく変化することに起因している．このように考えると，数値計算を安定させる方法としては，仮想剛性の採用が必ずしも最善とは思われない．むしろ，相対節点における梁軸直角方向変位を拘束した方がよいと考えられる．またその方が自由度数も減少し，計算効率の面でも優れている．このような観点から，仮想剛性を無視し，代わりに相対節点の梁軸直角方向変位を拘束して1/4円弧梁の解析を試みたが，十分に妥当な結果を得ることができた．

４．まとめ

Ｂ６要素を用いれば，桁高が極端に低い場合にも高精度の解が得られることを示し，その理由についても考察した．また選択的次数低減積分が必要となる背景を解き明かし，さらにこの要素の改善点も示唆した．今後はこれらの考察を基に，Ｂ６要素をさらに発展させる予定である．

参考文献

1)Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R.: A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method, Comput. Structures, Vol.13, pp.19-27, 1981.
2)Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F.: Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, Proc. of JSCE, No.368/I-5, pp.65-73, 1986.
3)山口栄輝・Kanok-Nukulchai, W.・太田俊昭：有限要素法による棒材の有限変位解析に関する研究，構造工学論文集，Vol. 35A，pp. 175-183，1989.
4)西野文雄・長谷川彰夫：新体系土木工学　7　構造物の弾性解析，技法堂，1983.
5)Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th edn., Vol.1, McGraw Hill, 1989.