I -185

面外荷重下での円形弾性介在物を有する接合無限弾性体問題の基本解

トピー工業　正　員○杉坂　憲明
山梨大学工学部　正　員　平島　健一

1　はじめに

二次元平面状態下の無限に拡がった領域に無限遠より働く面外せん断荷重や有限位置に集中力，あるいは点転位などの特異荷重ないし攪乱が作用した場合の標題の問題は，その工学的な重要性ならびに他への応用性から閉じた型の解析解を求める試みが従来よりなされている．

本報告では直線境界に接合された材質の異なる2種の等方性半無限体を接合した無限弾性体内に1個の円形介在物が存在し，その介在物が中空，弾性体または剛体の場合についての，面外方向の無限遠荷重や有限位置に面外特異荷重らせん転位などの攪乱が作用した場合の標題の問題の応力ならびに変位についての一般的な解析解を誘導する．

2　応力·変位を求める公式

対象となる応力·変位成分はxy平面に垂直な方向の座標をzとして，面外せん断応力τ_{xz}, τ_{yz}および変位u_zであり，いずれも面内座標(x, y)のみの関数である．物体力を無視した釣合式および構成式は次式のように与えられる．

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \\ \tau_{xz} = \mu \dfrac{\partial u_z}{\partial x},\ \tau_{yz} = \mu \dfrac{\partial u_z}{\partial y}. \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに,μはせん断弾性係数である．

図1に示すように円形境界Lを有する無限に拡がった領域を複素平面$t = x + iy$とする．円形境界Lに沿う極座標系(r, θ)の任意点における応力，変位を求める公式は複素関数$\phi(t)$を用いて次式のように与えられる．

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{\theta z} + i\tau_{rz} = e^{i\theta}\ \phi'(t), \\ u_z = Im[\phi(t)] \quad . \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

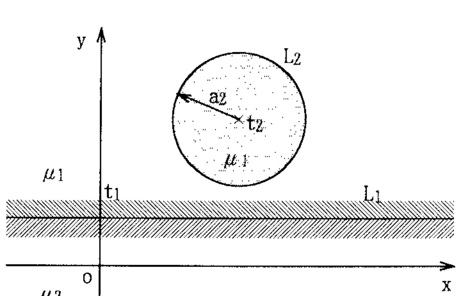

図1　円形境界を有し，直線境界の接合無限体の幾何形状

3　円形弾性介在物を有する接合無限弾性体の基本解

図1は直線境界L_1および円形境界L_2を有する多連結無限体であるが，この内のx軸に平行な直線境界L_1において，完全接合の仮定すなわち，次のように条件を設定する．

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{応力の連続性:}} & \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \\ \underline{\text{変位の連続性:}} & u_z^{(1)} = u_z^{(2)}. \end{array} \quad \cdots\cdots (3)$$

また，円形境界L_2において，完全接合の仮定すなわち，次のような条件を設定する．

$$\begin{array}{ll} \underline{\text{応力の連続性:}} & \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(I)}. \\ \underline{\text{変位の連続性:}} & u_z^{(1)} = u_z^{(I)}. \end{array} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここに，上添字の1は媒体1(Matrix1)を,2は媒体2(Matrix2)を，またIは介在物(Inclusion)を表し，それぞれのせん断弾性係数をμ_1, μ_2, μ_Iとする．

これらの条件より境界L_1，境界L_2で繰り返し計算を行った結果，複素応力関数として，次式が成立する．

<u>媒体1に対し,</u>

$$\phi_{M_1}(t) = \phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n \left\{\phi(M_1{}^n t) + \phi(M_2{}^n t)\right\} + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n \left\{\alpha_2 \overline{\phi(A_2 M_1{}^n t)} + \alpha_1 \overline{\phi(A_1 M_2{}^n t)}\right\}, \quad \cdots\cdots (5)$$

<u>媒体2に対し,</u>

$$\phi_{M_2}(t) = (1 + \alpha_1)\left\{\phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n \phi(M_1{}^n t) + \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n \overline{\phi(A_2 M_1^n t)}\right\}, \quad \cdots (6)$$

<u>介在物に対し,</u>

$$\phi_I(t) = (1 + \alpha_2)\left\{\phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n \phi(M_2{}^n t) + \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^n \overline{\phi(A_1 M_2^n t)}\right\}. \quad \cdots (7)$$

ここに,

$$\alpha_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \alpha_2 = \frac{\mu_I - \mu_1}{\mu_I + \mu_1}. \quad \cdots\cdots (8)$$

なお，上式中で用いられた種々の係数は次の2つの場合に対し，それぞれ以下のように与えられる．

(A) 直線境界L_1および円形境界L_2が接触していない場合

$$\left.\begin{aligned} M_i^n t &= \frac{(\gamma_{i2}k_i^n - \gamma_{i1})t + \gamma_{i1}\gamma_{i2}(1-k_i^n)}{(k_i^n - 1)t + \gamma_{i2} - k_i^n - \gamma_{i1}}, \\ \gamma_{i1} &= \frac{A_i - D_i + \sqrt{\Delta_i}}{2C_i},\ \gamma_{i2} = \frac{A_i - D_i - \sqrt{\Delta_i}}{2C_i}, \\ k_i &= \frac{A_i + D_i - \sqrt{\Delta_i}}{A_i + D_i + \sqrt{\Delta_i}},\ \Delta_i = (A_i - D_i)^2 + 4B_iC_i. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(B) 直線境界 L_1 および円形境界 L_2 が接触している場合

$$\left.\begin{aligned} M_i^n t &= \frac{(1+n_il_i\gamma_i)t - n_il_i\gamma_i^2}{n_il_i(t-\gamma_i)+1}, \\ \gamma_i &= \frac{A_i - D_i}{2C_i},\quad l_i = \frac{2C_i}{A_i + D_i}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \overline{t_2} + 2t_1, \\ B_1 &= -(\overline{t_2} + 2t_1)t_2 + a_2^2, \\ C_1 &= 1, \\ D_1 &= -t_2. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= t_2, \\ B_2 &= (2\overline{t_1} - \overline{t_2}) + a_2^2, \\ C_2 &= 1, \\ D_2 &= 2\overline{t_1} - \overline{t_1}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

以上が2個の円形介在物を有する弾性体の基本解となる．また各種の問題の一般解を求めるためには，式 (5) ～ (7) の主要部 $\phi(t)$ に次式を代入して得られる．

[I] 無限遠から一様な面外せん断荷重が作用する場合．

$$\phi(t) = (\tau_{yz}^{\infty} + i\ \tau_{xz}^{\infty})\ t \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

[II] 領域内の一点に面外からの集中力 Z および面外方向の点転位 $[u_z]$ が作用する場合．

$$\phi(t) = \frac{\mu_M[u_z] - iZ}{2\pi}\ ln\ (t - t_0) \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

4 数値計算例

ここでは前節で掲示した解析解を用い数値計算例を示す．まず，無限遠せん断荷重 τ_{xz}^{∞} が作用する場合について，円形介在物がその半径 a_2 の 1/2 だけ接合面から離れた場所に位置し，媒体2と介在物の弾性係数比を $\mu_2/\mu_1 = \mu_I/\mu_1 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, \infty$ と変化させ，τ_{xz}^{∞} が作用する場合の境界 L_1 の応力 $\tau_{xz}^{(1)}$ の分布を図2に示した．

次に，面外集中力 Z が作用する場合の応力·変位を求める．すなわち，作用点 t_0 が円孔中心より半径 a_2 の 1.5 倍の距離に y 軸との角度 λ で反時計回りに移動して作用する場合の円形境界周縁の応力·変位を求める．

図3に集中力 Z が作用する場合の境界 L_2 上における変位 $u_z^{(1)}(=u_z^{(I)})$ の分布図を示したものである．この場合の幾何形状として介在物の中心を y 軸上にとり境界 L_1 と境界 L_2 の距離を介在物の半径 a_2 と同じにし，$\mu_2/\mu_1 = 0$,(*i.e.* 境界 L_1 が自由境界) および $\mu_I/\mu_1 = 2.0$ とする．図中のピークや変曲点の位置が徐々にずれるのは，集中力 Z の作用位置が変化して介在物の中心からの角度が変化することによるものである．またピークの大きさが変化するのは境界 L_1 との距離が変化することによるものである．

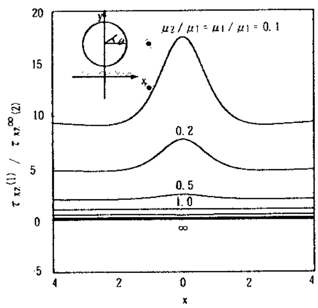

図2 無限遠荷重 τ_{xz}^{∞} が作用する場合の境界 L_1 上の応力 $\tau_{xz}^{(1)}$

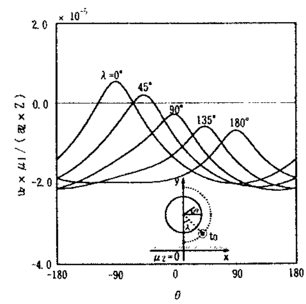

図3 集中力 Z が作用する場合の境界 L_2 上の変位 $u_z^{(1)}$

5 おわりに

本報告では，円形弾性介在物を有する2種の等方性半無限接合体に無限遠の面外せん断荷重，任意の有限位置に面外集中力およびらせん転位，集中力対および転位対，さらに等分布直線荷重が作用する問題に対する基本的な解析解の誘導を行ったものである．それらのうちの特別な問題について，従来までの研究者による解と一致（ないし対応）することを検証すると共に，代表的な問題に対する応力·変位の分布状態を計算した．

参考文献

[1] 平島・杉坂，機論，60-575，A(1994)．

[2] Honein,E, Honein,T & Herrman,G, Q.Appl. Math, 30(1992), 479.

[3] 木村・平島・広瀬，機論，58-555，A(1992)．

[4] 平島・Jedidi・Mura，機論，59-559，A(1993)．