

面外荷重下でのだ円形の補強リングを有する 弾性問題の解析解とその数値計算例

群馬高専 土木科 正 員 木村 清和
山梨大学 工学部 正 員 平島 健一
飛鳥建設(株) 正 員 ○木口 昌彦

1. はじめに

これまでも写像関数により物理平面上の共焦点だ円が原点中心の円に写像されるということに着目し、二つの共焦点だ円境界を有する二つの弾性体の接合問題が取り扱われてきた⁽¹⁾。

本報告においては、二次元等方性弾性体内に共焦点のだ円境界が二つ存在し、これらの境界に挟まれた領域には補強リングが、その内側の領域には空孔または剛体介在物が存在する問題の解析を行う。無限遠からの一様な面外せん断荷重が作用し、補強リングと媒体(Matrix)との境界は完全連続あるいはすべりが生じる場合を想定し、複素応力関数を用いて等角写像することにより解析解を導出する。また、その解を用いて数値計算を行い、補強リング部や媒体の応力、変位および応力(特異)拡大係数に及ぼす弾性補強リングの厚さおよび弾性係数による影響等について考察する。

2. 基礎方程式と基本解

図1に示すように、奥行き方向に断面形状の変化のない十分長いだ円形境界を想定し、媒体(Matrix)と補強リングとの間のだ円形境界を L_1 、補強リングの内側の共焦点だ円形境界を L_2 とする。この場合、一般に面外せん断荷重下での応力、変位成分は xy -平面に垂直な方向の座標を z として、せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} および変位 u_z であり、いずれも面内座標系 (x, y) のみの関数となる。

物体力を無視した釣合方程式および構成式は次式のように与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^k}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{xz}^k = G_k \frac{\partial u_z^k}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^k = G_k \frac{\partial u_z^k}{\partial y} \quad (2)$$

ここに $G_k(k=1, 2)$ は $k=1$ のときは媒体の、 $k=2$ のときは補強リングのせん断弾性係数である。

ここで、図1に示す複素平面を $z = x + iy$ で表し、この z -平面を ζ -平面に写像する関数を $\omega(\zeta)$ とすれば、次式が成立する。

$$z = \omega(\zeta) = R_0(\zeta + m/\zeta) \quad (3)$$

ここに、

$$R_0 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \quad (4)$$

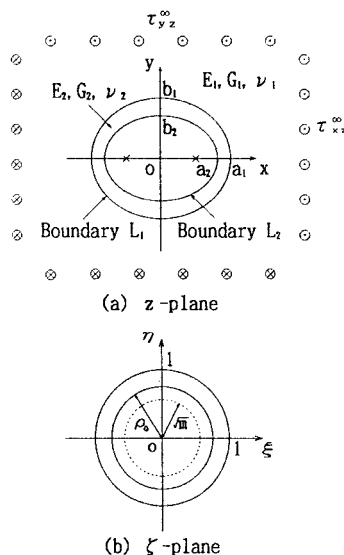


図1. 物理平面および写像平面.

この写像関数を用いることにより図1(a)に示す境界 L_1 は ζ -平面上での単位円に、また境界 L_2 は半径 $\rho_0(<1)$ の円に写像される。

上記のだ円形境界 L_k に沿う曲線座標系 (ξ, η) の任意点における面外方向(奥行きの z 方向)の変位 u_z^k および下記の合せん断力 P_z^k は共に調和関数でなければならないことから、変位、応力は複素関数 $F_k(z)$ を用いて次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_z^k &= \frac{1}{G_k} \operatorname{Re}[F_k(z)] = \frac{1}{2G_k} \{F_k(z) + \overline{F_k(z)}\}, \\ \tau_{\xi z}^k - i\tau_{\eta z}^k &= (\tau_{xz}^k - i\tau_{yz}^k)e^{i\phi} = F_k'(z)e^{i\phi}, \\ P_z^k &= \int p_z^k ds = \int (\tau_{xz}^k dy - \tau_{yz}^k dx) \\ &= \operatorname{Im}[F_k(z)] = \frac{1}{2i} \{F_k(z) - \overline{F_k(z)}\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、

$$e^{i\phi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega(\zeta)|} \quad (6)$$

3. 境界条件と定式化

境界 L_2 上の境界条件は自由または固定の場合には

式(7)で、また境界 L_1 上の境界条件は合応力と変位を用いて式(8)のように与えられるものとする。

○境界 L_2 (i.e. $\zeta\bar{\zeta} = \rho_0^2$) において

$$\left. \begin{aligned} P_z^2 &= 0 & : & \text{自由境界の場合,} \\ u_z^2 &= 0 & : & \text{固定境界の場合.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

○境界 L_1 (i.e. $\zeta\bar{\zeta} = 1$) において

$$\alpha P_z^1 = P_z^2, \quad \beta u_z^1 = u_z^2, \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 α, β はそれぞれ合応力および変位に関連した境界 L_1 上でのある程度のすべりを許容するすべり係数である。これらのとり得る値は $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ である。

上述の境界条件を満足するように鏡像原理を用いた解析接続により定式化を行う。ここでは、Sendekyjら⁽²⁾ が用いたように補強リング領域のものを基本関数とする。

最終的に各領域の解析解 $F_1(\zeta), F_2(\zeta)$ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= AR_0\zeta - \frac{k_2 R_0}{(1+K)(1-K)} \times \\ &\quad \left\{ KA \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho^2 \right) \zeta + \frac{\bar{A}}{\zeta} \left(\rho^2 - \frac{K^2}{\rho^2} \right) \right\}, \\ F_2(\zeta) &= \frac{\alpha R_0}{1-K} \left\{ A\zeta + \frac{K\bar{A}}{\zeta} \right. \\ &\quad \left. - k_2 \left(KA \frac{\zeta}{\rho^2} + \frac{\bar{A}}{\zeta} \rho^2 \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、パラメータ K, A, k_2 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\beta G_2 - \alpha G_1}{\beta G_2 + \alpha G_1}, \\ A &= \frac{\tau_{xz}^\infty - i\tau_{yz}^\infty}{1 - \frac{k_2 K}{1-K} \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho^2 \right)}, \\ k_2 &= \begin{cases} -1 & : \text{境界 } L_2 \text{ が自由境界の場合,} \\ 1 & : \text{境界 } L_2 \text{ が固定境界の場合.} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

4. 応力(特異)拡大係数

内側の境界 L_2 の短軸が $b_2=0.0$ でクラックないしは線状剛体 (rigid line inhomogeneity) となる場合、その先端において特異性をもった応力集中が起こるが、そのときのクラック先端における応力拡大(特異)係数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{III} &= i\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow \sqrt{m}} \sqrt{\omega(\zeta) - \omega(\sqrt{m})} \frac{F_2'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ &= i\sqrt{\pi} \frac{F_2'(\sqrt{m})}{\omega''(\sqrt{m})}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

上式中で必要となる写像関数 $\omega(\zeta)$ および解析関数 $F_2(\zeta)$ の導関数を求めて代入すると、最終的に応力拡大(特異)係数 K_{III} が次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} K_{III} &= i\sqrt{\frac{\pi\sqrt{m}}{2R_0}} \frac{\alpha R_0}{1-K} \\ &\quad \times \left\{ A \left(1 - \frac{k_2 K}{m} \right) + \bar{A} \left(k_2 - \frac{K}{m} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

5. 数値計算例

前節で示した解析解を用いた数値計算例を図2に示す。これは無限遠からの一様な応力 τ_{yz}^∞ が作用する場合の最大せん断応力 τ_{max} の等高線図である。このとき、境界 L_1 上の境界条件は完全接合(すなわち、すべり係数は $\alpha = \beta = 1.0$) で、せん断弾性係数比を $G_2/G_1=10.0$ とする。境界 L_2 の境界条件としては図面の右側半分は自由境界、左側半分は固定境界の場合である。

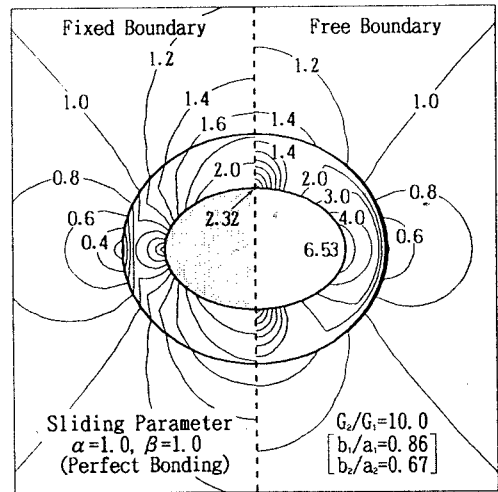


図2. 最大せん断応力 τ_{max} の等高線図。

6. まとめ

本報告は面外せん断荷重下での円形の補強リングを有する領域の内側が空孔または剛体介在物とした問題の応力、変位場の解析を行ったものである。ここで補強リングと媒体の接合面 L_1 の境界条件は完全接合とすべりの二つの条件を設定した。また、ここでの解析手法には複素応力関数を用い、その定式化に解析接続を用いることにより厳密な解析解を求めた。さらにこの解を用いて数値計算を行うことにより、本報告において想定した解析モデルにおける応力場、変位場および応力拡大(特異)係数が具体的に求められ、補強リングの影響等の詳細については講演会当日発表する。

文 献

- (1) Wu, C.H., Chen, C.H., J. Appl. Mech., Vol. 57(1990), 91 ~ 96.
- (2) Sendekyj, G.P., Fundamental Aspects of Dislocation Theory, J.A. Simmon, R.de Wit and R. Bullough, (Eds.), Spec. Publ., 317, (1970), 57.