

I-180

複合材料の繊維引き抜き問題に対する弾性解析

日本道路公団 正 員 ○橋詰良太
山梨大学工学部 正 員 平島健一

1 はじめに

構造物や機械部材などの製作に用いられる材料は多種多様であるが、これらの中であって、複合材料 (composite materials) と呼ばれる材料分野が急速な進歩を遂げ、注目を集めている。本研究では、弾性マトリクスからの繊維引き抜き問題の弾性問題を取り扱う。最終的には繊維とマトリクスの間に接着層を導入して、弾性および粘弾性解析へ発展させることによって、ロックボルト等の引き抜き問題を解析することが本研究の目的である。

J.Banbaji¹⁾は弾性マトリクスからの繊維引き抜き試験の理論的解析を一般化した形で論文を発表している。具体的には法線応力を考慮に入れて、繊維の直応力および界面におけるせん断応力の解析解を誘導し、後半においては応力の分布図を提示する。

2 基礎方程式と基本解

図1のように、マトリクスの中に長さ $l/2$ だけ埋設されている円柱状の繊維を想定し、繊維に平行な方向を z 軸とする。繊維軸方向に荷重 P が作用する場合、繊維およびマトリクスの構成式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_f &= \frac{1}{E_f} \left(\frac{P}{A_f} - 2\nu_f \sigma_N \right), \\ \varepsilon_m &= \frac{1}{E_m} \left(\frac{P}{A_m} - 2\nu_m \sigma_N \right). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 σ_N は周りのマトリクスによって実際に埋め込み繊維に直角に作用する法線応力である。長さ dz 、半径 r_f の微小繊維要素の釣合方程式は次式で表される。

$$\frac{dP}{dz} = 2\pi r_f \tau(z). \dots\dots\dots (2)$$

繊維とマトリクスはともに弾性体であるので、同じ位置での繊維とマトリクスの変位をそれぞれ u, v として、両者の間にすべりが発生し、せん断応力が変位差 ($u - v$) に比例して発生するものと仮定すれば、次式が成立する。

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = 2\pi r_f K \left(\frac{du}{dz} - \frac{dv}{dz} \right) = 2\pi r_f K (\varepsilon_f - \varepsilon_m). \dots\dots (3)$$

ここで、式(1)より、上式は次のようになる。

$$\frac{d^2 P}{dz^2} - \alpha^2 P = -\alpha'^2 \sigma_N. \dots\dots\dots (4)$$

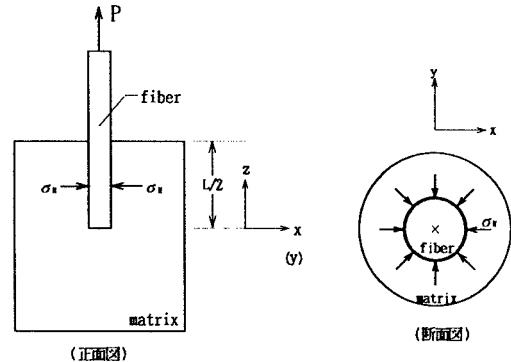


図1 引き抜き試験の概要図

定数 α, α' は弾性パラメータである。上式は法線応力 σ_N が繊維に作用しているとき、繊維を引き抜くための深さ z における引張応力を求める微分方程式である。

はじめに、埋め込み繊維の長さ方向に垂直に作用する法線応力 σ_N が一定ではなくて、 z 座標に依存するとして $\sigma_N = \frac{1}{c} \tau(z)$ のように定義する。ここに、 c は繊維とマトリクスとの間における摩擦係数である。式(2)より、 σ_N は次式のようになる。

$$\sigma_N = \frac{1}{2\pi r_f c} \frac{dP}{dz}. \dots\dots\dots (5)$$

この場合の P に関する微分方程式は式(4)に式(5)を代入すればよく、次式のように求められる。

$$\frac{d^2 P}{dz^2} + a \frac{dP}{dz} - \alpha^2 P = 0. \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$a = \frac{2K}{cQ}. \dots\dots\dots (7)$$

式(6)を以下に示す2通りの境界条件の下で解く。

(A) 境界条件 I

$$\left. \begin{aligned} \text{at } z = 0, & \quad P = 0 \\ \text{at } z = \xi \frac{l}{2}, & \quad P = P_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(B) 境界条件 II

$$\left. \begin{aligned} \text{at } z = 0, & \quad P = 0 \\ \text{at } z = \xi \frac{l}{2}, & \quad \tau = \tau_{max} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

条件 I の式 (8) を用いた場合、 P, τ は次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= P_f \exp \left[\frac{a}{2} \left(\xi \frac{l}{2} - z \right) \right] \frac{\sinh \beta z}{\sinh \beta \xi \frac{l}{2}} \\ \tau(z) &= \frac{P_f \beta}{2\pi r_f} \exp \left[\frac{a}{2} \left(\xi \frac{l}{2} - z \right) \right] \left(\cosh \beta z - \frac{a}{2\beta} \sinh \beta z \right) / \sinh \beta \xi \frac{l}{2} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

条件 II の式 (9) を用いた場合には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= \frac{2\pi r_f \tau_{max}}{\beta} \exp \left[\frac{a}{2} \left(\xi \frac{l}{2} - z \right) \right] \frac{\sinh \beta z}{\cosh \beta \xi \frac{l}{2} - \frac{a}{2\beta} \sinh \beta \xi \frac{l}{2}} \\ \tau(z) &= \tau_{max} \exp \left[\frac{a}{2} \left(\xi \frac{l}{2} - z \right) \right] \frac{\cosh \beta z - \frac{a}{2} \sinh \beta z}{\cosh \beta \xi \frac{l}{2} - \frac{a}{2\beta} \sinh \beta \xi \frac{l}{2}} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

次に、法線応力 σ_N が一定である場合の解析解は同様の過程により次のように求められる。

(i) 境界条件 I を導入する場合

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= \left(\frac{\cosh \alpha \xi \frac{l}{2} - 1}{\sinh \alpha \xi \frac{l}{2}} - \cosh \alpha z + 1 \right) \cdot \frac{2\sigma_N R}{Q} + P_f \frac{\sinh \alpha z}{\sinh \alpha \xi \frac{l}{2}} \\ \tau(z) &= \left(\frac{\cosh \alpha \xi \frac{l}{2} - 1}{\sinh \alpha \xi \frac{l}{2}} - \sinh \alpha z \right) \cdot \frac{2\sigma_N R}{Q} + P_f \frac{K}{\alpha R} \frac{\cosh \alpha z}{\sinh \alpha \xi \frac{l}{2}} \end{aligned} \right\} (12)$$

(ii) 境界条件 II を導入する場合

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= \left\{ (\sinh \alpha z) \left(\tanh \alpha \xi \frac{l}{2} \right) - \cosh \alpha z + 1 \right\} \cdot \frac{2\sigma_N R}{Q} + \tau_{max} \frac{\alpha R}{K} \frac{\sinh \alpha z}{\cosh \alpha \xi \frac{l}{2}} \\ \tau(z) &= \left\{ (\cosh \alpha z) \left(\tanh \alpha \xi \frac{l}{2} \right) - \sinh \alpha z \right\} \cdot \frac{2\sigma_N R}{\alpha Q} + \tau_{max} \frac{\cosh \alpha z}{\cosh \alpha \xi \frac{l}{2}} \end{aligned} \right\} (13)$$

ここに、 α, Q, R, K は弾性パラメータである。

3 数値計算例

境界条件 I を導入した場合の応力分布を図 2 および図 3 に示す。ただし $a/2\beta$ は弾性パラメータであり、 σ_N の大きさを表す。また、 $\alpha l/2 = 1.0$ は埋め込み長が比較的小さい場合を、 $\alpha l/2 = 10.0$ は埋め込み長が比較的小さい場合を表し、 $\xi = 1.0$ と設定する。

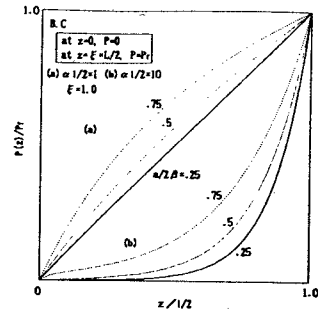


図 2 境界条件 I を導入した場合の $P(z)$ の分布 (σ_N が一定でない場合)

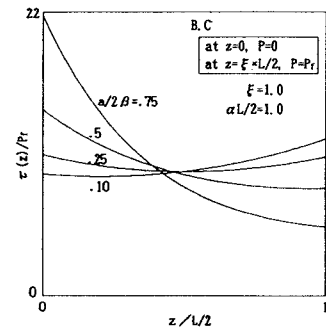


図 3 境界条件 I を導入した場合の界面における $\tau(z)$ の分布 (σ_N が一定でない場合)

図 2 より、 σ_N が大きいほど引張応力は大きくなるということが観察される。それを微分して得られる界面での $\tau(z)$ の分布図が図 3 であるが、 P の傾きが大きい領域では τ の値が大きくなることからわかる。したがってこの場合、底部で界面のはく離が生じることが想定される。

また紙面の都合上、図は省略するが、境界条件を同一にして σ_N の条件を変えると、せん断応力の分布が全く異なる様子が観察される。よって実際の問題においては、特に境界条件の設定に注意を払うことが重要である。

4 おわりに

本研究では、弾性マトリクスからの繊維引き抜き問題の弾性解析を行い、繊維の直応力および界面におけるせん断応力の解析解を誘導した。また後半においては若干の数値計算を行い、応力の分布図を提示した。今後、繊維とマトリクスの間に接着層を導入して、弾性および粘弾性解析へと発展させることが課題である。

参考文献

- [1] J. Banbaji, Composites Science and Technology, 32(1988), pp.183-193.