I －179

二次元直交異方性弾性体の楕円リング問題の解析について

福島高専　正員○堤　　隆
山梨大学　正員　平島　健一

１．はじめに　二次元直交異方性弾性体の応力および変位の解析は、Lekhnitskiiの複素応力関数などにより行われているが、それらの大半は半無限板、ひとつの孔を有する無限板、あるいは楕円板などの単連結領域を対象としている。本研究では、二次元直交異方性弾性体について多連結領域のひとつである楕円リング問題の応力および変位の解析を行った。

２．基礎方程式　内部境界、外部境界ともに軸対称な外力が作用している二次元直交異方性弾性体の楕円リング問題の複素応力関数を、次のように表す。

$$\phi_j(z_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n-1,j} z_j^{2n-1}, \quad (j=1,2) \qquad (1)$$

ここに、複素定数 $a_{2n-1,j}$ は境界条件より決定され、複素変数 z_j は次式で表される。

$$z_j = x + \mu_j y \qquad (2)$$

ここに、μ_j は直交異方性弾性体の異方性比により決定される複素パラメータである。

３．境界条件　物理平面上の楕円を ζ 平面上へ単位円に写像する写像関数は、次式で表される。

$$z_j = R_{oj}(w_j + m_j w_j^{-1}) \qquad (3)$$

$$R_{oj} = \frac{a - i\mu_j b}{2}, \quad m_j = \frac{a + i\mu_j b}{a - i\mu_j b} \qquad (4)$$

$$(j = 1, 2)$$

ここに、a、b はそれぞれ楕円の長軸、短軸の長さである。次に、合応力と応力関数との関係は次式で表される。

$$\pm\int_0^s Y_n ds = 2Re[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] \qquad (5)$$

$$\mp\int_0^s X_n ds = 2Re[\mu_1\phi_1(z_1) + \mu_2\phi_2(z_2)] \qquad (6)$$

また、合応力は次式にようにFourier展開される。

$$\pm\int_0^s Y_n ds = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{2n-1}e^{i(2n-1)\theta} + \bar{\alpha}_{2n-1}e^{-i(2n-1)\theta}) \qquad (7)$$

$$\mp\int_0^s X_n ds = \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_{2n-1}e^{i(2n-1)\theta} + \bar{\beta}_{2n-1}e^{-i(2n-1)\theta}) \qquad (8)$$

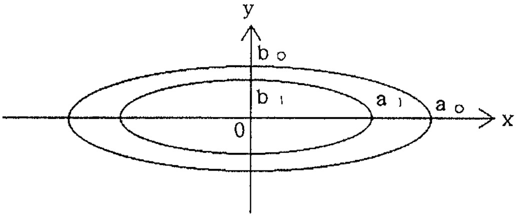

図１　楕円リングの形状

ここに、$\bar{\alpha}_{2n-1}$、$\bar{\beta}_{2n-1}$ はそれぞれ α_{2n-1}、β_{2n-1} に共役な複素数で、以下共役複素数は同様の表記を用いる。これらの式を境界条件式として用いる場合、複号は内部境界上で上、外部境界上で下となる。

これらの式を内部境界、外部境界に用いるが、外部境界に関するものには ∧ をつけ、内部境界に関するものと区別する。

まず、内部境界について、写像関数を式 (1) に代入して w_j について展開したものを、次式のように表すものとする。

$$\phi_j(z_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n-1,j} w_j^{2n-1} \qquad (9)$$

この式と、内部境界上の合応力より次の関係式を得る。

$$A_{-2n+1,j} = \{1 - \frac{(\bar{\mu}_k - \mu_k)(\mu_j - \bar{\mu}_j)}{(\mu_j - \mu_k)(\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_j)}\}^{-1} [\{\mu_j - \mu_k\}^{-1}\{\mu_k\bar{\alpha}_{2n-1} - \bar{\beta}_{2n-1} + (\bar{\mu}_j - \mu_k)\bar{A}_{2n-1,j}\} + \frac{\bar{\mu}_k - \mu_k}{(\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_j)(\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_j)} \{\bar{\mu}_j\alpha_{2n-1} - \beta_{2n-1} + (\mu_k - \bar{\mu}_j)A_{2n-1,k}\}] \qquad (10)$$

ここに、α_{2n-1}、β_{2n-1} は、内部境界上の合応力のFourier係数である。また、$j=1$ のとき

$k=2$ 、 $j=2$ のとき $k=1$ とする。式 (1) と (3) の係数を比較して次式を得る。

$$A_{2n-1,j}=\sum_{r=0}^{\infty}R_{oj}^{2r-1}m_j^{r-n}\binom{2r-1}{r-n}a_{2r-1,j} \tag{11}$$

$$a_{-2n+1,j}=\sum_{r=1}^{n}R_{oj}^{2r-1}m_j^{n-r}N_{-2n+1,2r-1}(A_{-2r+1,j}-m_j^{2r-1}A_{2r-1,j}) \tag{12}$$

ここに、 $N_{-2n+1,2r-1}$ は正の整数である。よって、式 (10) 、 (11) 、 (12) より $A_{2n-1,j}$ を消去すれば内部境界における境界条件式が得られる。

$$\begin{aligned}a_{-2n+1,j}=\sum_{r=1}^{n}R_{n+r-1}m_j^{n-r}N_{-2n+1,2r-1}&\Big\{\,\Theta_{2r-1,j}+\sum_{q=r}^{\infty}\binom{2q-1}{q-r}\\&(\,P_{-2q+1,j}\bar{R}_{oj}^{2q-1}\bar{m}_j^{q-r}\bar{a}_{2q-1,j}\\&+Q_{-2q+1,j}R_{ok}^{2q-1}m_k^{q-r}a_{2q-1,k}\\&-R_{oj}^{2q-1}m_j^{q+r-1}a_{2q-1,j}\,)\Big\}\end{aligned} \tag{13}$$

次に、外部境界については、 ζ 平面上の単位円に変換した場合、内部に分岐点を持っているので、複素応力関数 $\phi_j(z_j)$ は内部で正則な部分とそうでない部分に分けられる。

$$\phi_j(z_j)=\phi_{jS}(z_j)+\phi_{jR}(z_j) \tag{14}$$

$$\phi_{jS}(z_j)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-2n+1,j}z_j^{-2n+1} \tag{15}$$

$$\phi_{jR}(z_j)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1,j}z_j^{2n-1} \tag{16}$$

これらを $\hat{w}_j$ で展開したものを次式のように表すものとする。

$$\phi_{jS}(z_j)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-2n+1,j}\hat{w}_j^{-2n+1} \tag{17}$$

$$\phi_{jR}(z_j)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n-1,j}(\hat{w}_j^{2n-1}+\hat{m}_j^{2n-1}\hat{w}_j^{-2n+1}) \tag{18}$$

とすると、

$$a_{2n-1,j}=\sum_{r=n}^{\infty}\hat{R}_{oj}^{-2n+1}\hat{m}_j^{r-1}\hat{N}_{2n-1,2r-1}B_{2r-1,j} \tag{19}$$

$$C_{-2n+1,j}=\sum_{r=1}^{n}\hat{R}_{oj}^{-2n+1}\hat{m}_j^{n-r}\hat{M}_{-2n+1,-2r+1}a_{-2r+1,j} \tag{20}$$

ここに、 $\hat{N}_{2n-1,2r-1}$ 、 $\hat{M}_{-2n+1,-2r+1}$ は正または負の整数である。また、合応力との関係より、

$$\begin{aligned}(\mu_k-\mu_j)B_{2n-1,j}=\mu_k\hat{\alpha}_{2n-1}-\hat{\beta}_{2n-1}&\\-(\mu_k-\bar{\mu}_j)\Big[\bar{C}_{-2n+1,j}+\frac{\bar{\hat{m}}_j^{2n-1}}{\bar{\mu}_k-\bar{\mu}_j}&\\\{\bar{\mu}_k\bar{\hat{\alpha}}_{2n-1}-\bar{\hat{\beta}}_{2n-1}-(\bar{\mu}_k-\mu_j)(C_{-2n+1,j}&\\+\hat{m}_j^{2n-1}B_{2n-1,j})-(\bar{\mu}_k-\mu_k)&\\(C_{-2n+1,k}+\hat{m}_k^{2n-1}B_{2n-1,k})\}\Big]&\\-(\mu_k-\bar{\mu}_k)\Big[\bar{C}_{-2n+1,k}+\frac{\bar{\hat{m}}_k^{2n-1}}{\bar{\mu}_j-\bar{\mu}_k^{2n-1}}&\\\{\bar{\mu}_j\bar{\alpha}_{2n-1}-\bar{\beta}_{2n-1}&\\-(\bar{\mu}_j-\mu_k)(C_{-2n+1,k}+\hat{m}_k^{2n-1}B_{2n-1,k})&\\-(\bar{\mu}_j-\mu_j)(C_{-2n+1,j}+\hat{m}_j^{2n-1}B_{2n-1,j})\}\Big]&\end{aligned} \tag{21}$$

よって、式 (19) 、 (20) 、 (21) より $B_{2n-1,j}$ 、 $C_{-2n+1,j}$ を消去すれば外部境界の境界条件式が求められる。

$$\begin{aligned}a_{2n-1,j}=\sum_{r=n}^{\infty}\hat{R}_{oj}^{-2n+1}\hat{m}_j^{r-1}\hat{N}_{2n-1,2r-1}&\Big\{\,\hat{\Theta}_{2r-1,j}+\sum_{q=1}^{r}\hat{M}_{2r-1,2q-1}\\&(\,\hat{S}_{2q-1,j}\hat{R}_{oj}^{-2q+1}\hat{m}_j^{r-q}a_{-2q+1,j}\\&+\hat{T}_{2q-1,j}\bar{\hat{R}}_{oj}^{-2q+1}\bar{\hat{m}}_j^{r-q}\bar{a}_{-2q+1,j}\\&+\hat{U}_{2q-1,j}\hat{R}_{ok}\hat{m}_k^{r-q}a_{-2q+1,k}\\&+\hat{V}_{2q-1,j}\bar{\hat{R}}_{ok}\bar{\hat{m}}_k^{r-q}\bar{a}_{2q-1,k}\,)\Big\}\end{aligned} \tag{22}$$

ここに、 $\Theta_{2n-1,j}$ 、 $\hat{\Theta}_{2n-1,j}$ は境界上の合応力とリングの形状と異方性比、 $P_{-2n+1,j}$ 、 $Q_{-2n+1,j}$ 、 $\hat{S}_{2n-1,j}$ 、 $\hat{T}_{2n-1,j}$ 、 $\hat{U}_{2n-1,j}$ 、 $\hat{V}_{2n-1,j}$ はリングの形状と異方性比より決定される複素定数である。

3．おわりに

式(13)、(22)の連立無限一次方程式を解いて応力関数の複素定数が定められ、応力および変位が求められる。なお、弾性主軸と座標軸が一致する場合は、 $\bar{R}_{oj}=R_{ok}$ 、 $\bar{m}_j=m_k$ となるので、 $\bar{a}_{\pm n,j}=a_{\pm n,k}$ と仮定して解析を行う。数値例は、講演会当日に発表する。

参考文献

1. 林卓夫：直交異方性円環の平面応力について、日本機械学会論文集（第1部）No.164,pp.516～523,1960.
2. Lekhnitskii,S.G.:Anisotropic Plates,Gordon & Breach Sch. Pub.,pp.141～147,1968.