

## 任意形状孔を有する粘弾性体の変位解析

山梨大学大学院 学生員 柴田 善央  
山梨大学工学部 正 員 平島 健一

## 1. はじめに

介在物を有する粘弾性体に関する問題に対して、著者らは無限に広がった粘弾性体内に、楕円形の介在物が存在する場合の応力、変位を求める解析解を既に求めている<sup>1)2)</sup>。本論文では、図1に示すように、任意の形状をもつ空洞を有する場合に拡張し、また荷重条件として、図2のような時刻  $t = 0$  の瞬間の荷重を零とし、時間経過とともに直線的に増加し、時刻  $t = t_0$  以降一定に保たれる Ramp 型の荷重が作用するものとする。

## 2. 解析理論

等方性弾性体内に図1のような任意形状孔を有する場合の孔周辺部の応力、変位に関する厳密解は重ね合わせ手法により、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^\infty + \sigma'_x, & \sigma_y &= \sigma_y^\infty + \sigma'_y, \\ \sigma_z &= \sigma_z^\infty + \sigma'_z, & \tau_{xz} &= \tau_{xz}^\infty + \tau'_{xz}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}^\infty + \tau'_{yz}, & \tau_{xy} &= \tau_{xy}^\infty + \tau'_{xy}, \\ u &= u^\infty + u', & v &= v^\infty + v', \\ w &= w^\infty + w'. \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \dots, \tau_{yz}^\infty$  は3次元的地山初期応力の成分であり、孔のない均質な弾性体に対する初期変位  $u^\infty, v^\infty, w^\infty$  は平面ひずみ状態の場合には、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u^\infty &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x^\infty - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y^\infty \right) x \\ &\quad + \left( \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^\infty - \tilde{\omega}^\infty \right) y + u_0, \\ v^\infty &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y^\infty - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x^\infty \right) y \\ &\quad + \left( \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^\infty - \tilde{\omega}^\infty \right) x + v_0, \\ w^\infty &= \frac{1}{G} (\tau_{xz}^\infty x + \tau_{yz}^\infty y) + w_0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

上式中の  $\tilde{\omega}^\infty$  は孔軸まわりの回転角を表す。また、 $u_0, v_0, w_0$  は剛体移動量を表す。 $E, \nu, G (= E/2(1+\nu))$  はそれぞれ弾性係数、ポアソン比、せん断弾性係数である。

また、 $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}, \tau'_{xz}, \tau'_{yz}, u', v', w'$  は複素解析関数  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  および  $\Phi_3(z)$  を用いて、次のように与えられる応力、変位成分である。

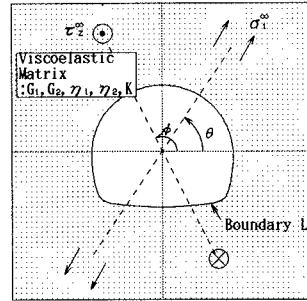


図1 問題の幾何形状

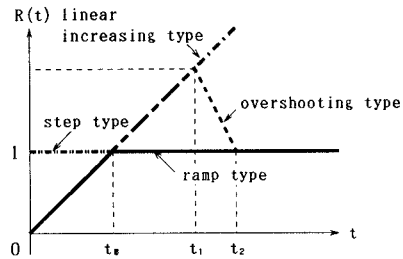


図2 荷重条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_\eta + \sigma'_\xi &= \sigma'_y + \sigma'_x = 4Re[\Phi'_1(z)], \\ \sigma'_\eta - \sigma'_\xi + 2i\tau'_{\xi\eta} &= e^{2i\varphi} (\sigma'_y - \sigma'_x + 2i\tau'_{xy}) \\ &= 2e^{2i\varphi} \{ z\overline{\Phi'_1(z)} + \Phi'_2(z) \}, \\ 2G(u'_\xi - iv'_\eta) &= 2G(u' - iv')e^{i\varphi} \\ &= e^{i\varphi} \{ k\overline{\Phi_1(z)} - \overline{z}\Phi'_1(z) - \Phi_2(z) \}, \\ \tau'_{\xi z} + i\tau'_{\eta z} &= e^{i\varphi} (\tau'_{yz} + i\tau'_{xz}) \\ &= -2\Phi'_3(z)e^{i\varphi}, \\ w' &= -\frac{2}{G}Im[\Phi_3(z)]. \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} e^{i\varphi} &= \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega(\zeta)}{|\omega(\zeta)|}, & e^{2i\varphi} &= \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \cdot \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega(\zeta)}}, \\ \Phi_1(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \zeta^{-m}, & \Phi_2(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m \zeta^{-m}, \\ \Phi_3(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_m \zeta^{-m}. \end{aligned} \right\} (4)$$

上式中の  $\omega(\zeta)$  は孔の断面形状によって決定される実定数  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_m, \beta_m$  を用い次式で与えられる<sup>3)4)</sup>。

$$\omega(\zeta) = (\alpha_0 + i\beta_0)\zeta + \sum_{m=1}^M (\alpha_m + i\beta_m)\zeta^{-m}. \quad (5)$$

$\bar{A}_m, \bar{B}_m, \bar{c}_m$  は荷重条件、 $\alpha_0, \beta_0, \alpha_m, \beta_m$  を用いて表される定数である。

ここで、図2のような Ramp 型荷重を  $R(t)$  とし、式(1)中の弾性理論解に現れた弾性定数、ポアソン比に関連する項を  $F(t)$  で表すと、Laplace 変換解は最終的に次式で与えられたことになる。

$$\left. \begin{aligned} F(t) \cdot R(t) &= \frac{1}{t_0} \{f(t) - f(t - t_0)\}, \\ f(t) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \tilde{F}(s) \right]. \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

ここに、 $\sim$  は Laplace 変換を示す。

弾性体と線形粘弾性体の間に成立する対応原理にしたがって、偏差成分に関し Burgers モデルを、また体積成分に関し Elastic モデルを採用したとき、式(6)の  $f(t)$  は以下に示す各項に対して例えば次式のような式で表される。

$$(a) \quad F(t) = \frac{1}{E} \text{ に対し、} \\ f(t) = \frac{6K\tau_1\tau_2 + 2\tau_1\eta_2}{18K\tau_1\eta_2} \left\{ \frac{a_0\alpha - \alpha^2 - b_0}{\alpha^3} e^{-\alpha t} + \frac{b_0}{2\alpha} t^2 + \frac{a_0\alpha - b_0}{\alpha^2} t + \frac{\alpha^2 - a_0\alpha + b_0}{\alpha^3} \right\}. \quad (7)$$

$$(b) \quad F(t) = \frac{\nu}{E} \text{ に対し、} \\ f(t) = \frac{3K\tau_1\tau_2 - 2\tau_1\eta_2}{18K\tau_1\eta_2} \left\{ \frac{a_0\alpha - \alpha^2 - b_0}{\alpha^3} e^{-\alpha t} + \frac{b_0}{2\alpha} t^2 + \frac{a_0\alpha - b_0}{\alpha^2} t + \frac{\alpha^2 - a_0\alpha + b_0}{\alpha^3} \right\}. \quad (8)$$

### 3. 数値計算例

上記の解析解を用いた数値計算例を示す。ここで、粘弾性モデルは式(7)～式(8)において具体的に提示されていた Burgers-Elastic モデルとする。粘弾性定数は Goodman の著書<sup>5)</sup>で採用されている岩塩の場合を対象とする。すなわち各値は以下のとおりとする。

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= 2.07 \text{ GPa}, \eta_1 = 4.83 \times 10^3 \text{ GPa} \cdot \text{min.} \\ G_2 &= 6.90 \text{ GPa}, \eta_2 = 5.73 \times 10^5 \text{ GPa} \cdot \text{min.} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

図3はそれぞれ、JR 型の断面形に対し、水平軸より反時計回りに、 $90^\circ$ 回転した方向から一軸性の荷重  $\sigma_1^\infty$  が作用した場合の孔断面境界  $L$  において生じる合変位（その点での法線および接線方向の変位成分をベクトル合成したもの）を示したものである。Step 型荷重の場合の結果を実線で、また  $t_0 = 2$  日とした Ramp 型荷重の場合の結果を点線で表示している。

次に、JR 型の断面形孔に対し、無限遠方から面外せん断荷重  $\tau_0^\infty$  が水平方向から測った作用方向角  $\varphi = 120^\circ$  で作用した面外問題の場合の孔縁の  $z$  方向

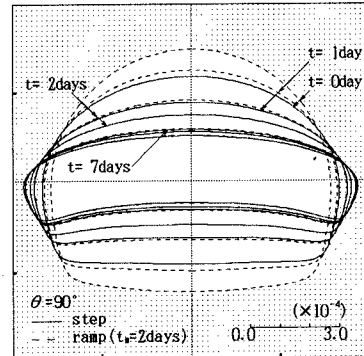


図3 面内荷重が作用した場合の時間経過による孔の形状変化 ( $\sigma_1^\infty = 1.0 \text{ kg/cm}^2, \theta = 90^\circ$ )

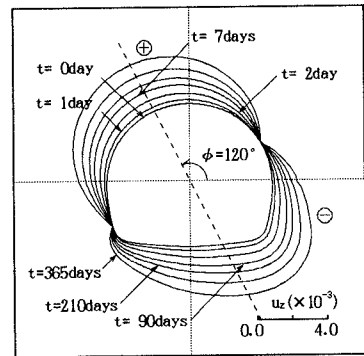


図4 面外荷重が作用した場合の時間経過による孔の形状変化 ( $\tau_2^\infty, \varphi = 120^\circ$ )

変位  $w$  の分布を図示したものが図4である。面内問題と同様に、時間経過に伴う変位の変化が示されている。

### 4. おわりに

本論文では任意形状孔を有する粘弾性体に対し、解析解を求めた。紙面の都合上省略したが、本論文で求めた解析解を順解析解として使い、材料定数等を求める逆解析に応用することができる。

### 参考文献

- 1) 平島健一・熊坂博夫・桜井英行・柴田善央：土木学会論文集，No.475/III-24，pp.29～37，1993.9
- 2) 平島健一・熊坂博夫・三谷泰浩・柴田善央：土木学会論文集，No.475/III-24，pp.143～146，1993.9
- 3) 平島・川上哲太郎・藤原紀夫・力間俊之：土木学会論文集，No.439/III-17，pp.17～26，1991.11
- 4) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫：土木学会論文集，No.436/III-16，pp.37～45，1991.9
- 5) Goodman, R.E.: Introduction to Rock Mechanics, Second Ed., John Wiley and Sons, 562p., 1989.