土木学会第50回年次学術講演会（平成7年9月）

I －176

厚板理論における固定の境界条件の精確性について（その１）

北見工業大学　　正員　奥村　勇
北見工業大学大学院　学生員　伊藤利彦

１．まえがき　最近の電子計算機は、実数値の最大値が大幅に大きくなり、級数解を用いた３次元弾性問題及び厚板の曲げの問題の解析に大きな福音をもたらしている。特に、厚板の曲げ解析においては、従来の計算機では、計算が困難であった中程度の厚さの平板の解析が、３次元弾性論によりできる様になり、厚板理論の有用性を見直す必要も生じ始めた。とはいえ、厚板理論が持つ解析方法及び数値計算の簡易性は、解析結果が厳密ではないと言え、工学的見地から、依然として魅力を持つものと考える。厚板理論の精確性は、たとえ、弾性論的な近似或いは仮定をそこに含まなくても、厚板としての境界条件が、３次元的な力学的条件或いは幾何学的条件にいかに精密に適合するかに大きく依存する様である。

著者らが、これまで用いて来た厚板理論は、弾性論的に厳密な１０次理論であり、自由及び単純支持の境界条件に対しては、高い精度を保持している。ところが、固定の境界条件に対しては、３次元弾性論による厳密解析と比較した所、必ずしも、精確性が高いとは言えない事が最近明らかになった。

本研究は、厚板理論における固定の境界条件の規定方法に考察を加え、周辺固定長方形厚板の厚板理論による解析結果と３次元弾性論による解析結果とを比較して、その精確性を検討するものである。

２．固定の境界条件　直交座標（ x, y, z ）を用いて、変位成分を u ，v 及び w で表すと、固定の境界条件は、次の様に表される。

３次元弾性論（完全固定）：

$x=c$ 或いは $y=c$ において、 $u=0,\ v=0,\ w=0$　　（１a－c）

Reissner理論（近似固定）：

$x=c$ 或いは $y=c$ において、 $w_R=0,\ \omega_x=0,\ \omega_y=0$　　（２a－c）

ここで、h を板厚として、

$$w_R=\frac{3}{2h}\int_{-h/2}^{h/2}w\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]dz,\ \ \omega_x=\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}uz\,dz,\ \ \omega_y=\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}vz\,dz \qquad (3a-c)$$

厚板理論（近似固定）：

Case 1.　$x=c$ において、

$(u)_{z=0}=0,\ (v)_{z=0}=0,\ (w)_{z=0}=0,\ (\partial w/\partial x)_{z=0}=0,\ (\partial v/\partial z)_{z=0}=0$　　（４a－e）

$y=c$ において、$(u)_{z=0}=0,\ (v)_{z=0}=0,\ (w)_{z=0}=0,\ (\partial w/\partial y)_{z=0}=0,\ (\partial u/\partial z)_{z=0}=0$　　（５a－e）

Case 2.　$x=c$ 或いは $y=c$ において、

$(u)_{z=0}=0,\ (v)_{z=0}=0,\ (w)_{z=0}=0,\ (\partial u/\partial z)_{z=0}=0,\ (\partial v/\partial z)_{z=0}=0$　　（６a－e）

Case 2 の条件は、式（６c,d,e）に注目すると、Reissner の固定の条件（２a－c）に類似しているが、厚板の中央面においてのみ、条件が課せられている点に相異がある。Case 1 の条件は、式(４d)及び式(５d)に見る様に、薄板理論のたわみ角の条件と同じである。Reissner 理論は、せん断変形を考慮した薄板理論と考えるのが妥当と思われるが、厚板理論においては、３つの変位成分は、x，y 及び z の３変数の関数になるので、Case 1 の条件も一つの固定の条件として考えられる。

３．解析例　図－１に示す部分等分布荷重を受ける周辺固定長方形厚板の解析結果を以下に示す。厚板の辺長比 $b/a=1.0$ 、載荷幅比 $c/a=d/b=0.3$ 及びポアソン比 $\nu=0.3$ を用い、板厚比 $e=h/a=1/4,1/6,1/8,1/10$ を用いる。厚板理論による固定の条件は、Case 2 の条件を用い、３次元弾性論による固定の条件は、完全固定を用いる。３次元弾性論による解析は、板厚が減少するにつれて、級数の収束が遅くなるので、 $e=1/10$ の場合には、多少の誤差が含まれていると考えて良い。表１から表３の量に付した下添字 t

及び３は、それぞれ、厚板理論及び３次元弾性論による値を意味する。表１から、たわみ w_t は、固定辺に近づくにつれ、相当に過大な値を示す事が分る。表２から、曲げモーメント $M_{x,t}$ は、厚板の中央部付近では過大に、固定辺では過小に値が出ている事が分る。表３から、せん断力 $Q_{x,t}$ は、板厚比が大きい場合にも良く合致するが、固定辺では、$e=1/10$ の場合でも、大きな相異を示す事が分る。図－２から図－４は、$e=1/6$ の場合の σ_{xx} の比較を示す。厚板の中心においては、極めて良く合致するが、固定辺に近づくにつれ、相異が大きくなり、固定辺の上、下端においては、全く異なった値を示す事が分る。これらの表から、厚板理論の Case 2 の条件の場合には、たわみ、曲げモーメント及びせん断力は、それぞれ、過大、過大及び過小に値が出る事が分った。奥村及び三宅は、以前に、片持長方形板の２次元問題を平面歪状態で解析した事があるが、完全固定のたわみの値は、初等理論におけるたわみ角の規定と回転角の規定とによるたわみの値の中間に来る事が明らかにされている。

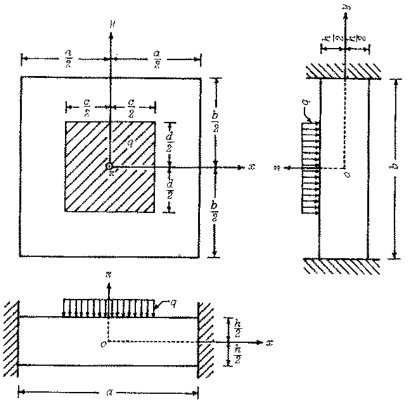


Fig.1 Thick plate with all edges clamped.

Table 1 Comparison of w at $y=z=0$. ($b/a=1.0$, $\nu=0.3$, $e=h/a$)

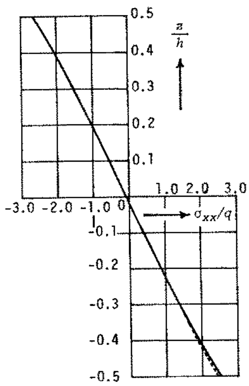
e	w_t/w_3		
	$x=0$	$x=0.2a$	$x=0.4a$
1/4	1.054	1.075	1.204
1/6	1.036	1.050	1.150
1/8	1.026	1.036	1.111
1/10	1.019	1.027	1.085

Table 2 Comparison of M_x at $y=0$. ($b/a=1.0$, $\nu=0.3$, $e=h/a$)

e	$M_{x,t}/M_{x,3}$		
	$x=0$	$x=0.2a$	$x=0.5a$
1/4	1.027	1.093	0.884
1/6	1.014	1.051	0.939
1/8	1.009	1.032	0.960
1/10	1.006	1.022	0.971

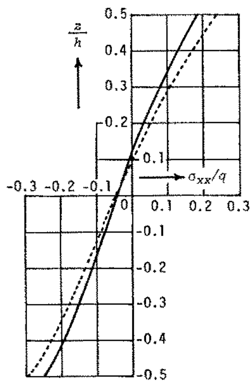
Table 3 Comparison of Q_x at $y=0$. ($b/a=1.0$, $\nu=0.3$, $e=h/a$)

e	$Q_{x,t}/Q_{x,3}$		
	$x=0.15a$	$x=0.3a$	$x=0.5a$
1/4	0.994	0.990	0.995
1/6	0.994	0.991	1.026
1/8	0.994	0.993	1.064
1/10	0.994	0.994	1.111



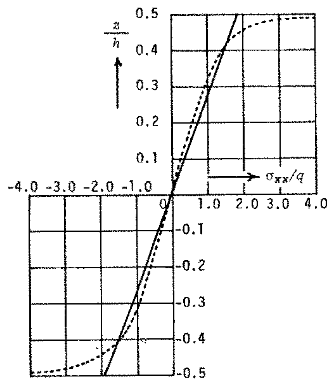
——: Thick plate theory.
------: 3D theory.

Fig.2 Comparison of σ_{xx} at $x=y=0$. ($b/a=1.0$, $h/a=1/6$)



——: Thick plate theory.
------: 3D theory.

Fig.3 Comparison of σ_{xx} at $x=0.3a$ and $y=0$. ($b/a=1.0$, $h/a=1/6$)



——: Thick plate theory.
------: 3D theory.

Fig.4 Comparison of σ_{xx} at $x=0.5a$ and $y=0$. ($b/a=1.0$, $h/a=1/6$)

４．あとがき　厚板理論における固定の条件は、いかなる理論であっても、近似固定の条件しか課し得ないので、たとえ、固定辺における断面力がある程度の精確さで求められても、応力値そのものは、完全固定とは大きな相異を示す。従って、厚板理論を用いる限り、固定辺のごく近傍における変位及び応力の値が、いかに精確に求められるかが重要であり、それが、厚板理論の精確性を左右すると言える。今回は、Case 2の条件のみについて検討したが、今後、Case 1 の条件についても検討してみたい。