土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

I -175

線状熱源作用下でのだ円形孔を有する異方性弾性問題の解析解

コミヤマ工業　正　員○清水　秀樹
山梨大学工学部　正　員　平島　健一

1　緒言

近年行われている地下空間の開発においては、エネルギー物資の貯蔵あるいは放射性廃棄物の岩盤内格納などの積極的な活用が見込まれている。上述のケースにおいては、従来までのように掘削や構造物設置にともなう力学的な影響のみばかりではなく、物資の貯蔵状態に関連する熱的な影響が無視できないものとなっている。

このような問題について、すでに筆者らは地盤が任意の異方性を有する半無限体内部に線状熱源が存在する場合についての解析解を誘導し、その数値例を示した。

本研究においては異方性を有する弾性無限体内にだ円孔が存在する問題を取り扱う。媒体の弾性定数などは任意の主軸の傾斜を許容しうる、より一般的な取り扱いができるものである。また、力学的境界条件としては自由あるいは固定の２種類、温度条件としては等温あるいは断熱の２種類を取り扱うため、計４種類の組み合わせが可能なものとなっている。

2　温度、応力および変位の解析解の誘導

図１に示す３次元的な異方性弾性無限体を対象とし、その内部に存在するだ円孔の対称軸に一致する x, y 軸、また、これに直交しだ円孔中心を通る z 軸を設定する。作用する線状熱源はだ円孔に平行し、奥行き方向に一定の強度であるとする。上述の媒体は平面ひずみ状態が達成されているものと考えられ、以下での定式化はこれを考慮したものである。

線状熱源が媒体の解析領域に存在する場合の温度場を表す関数を次式のように設定する。

$$T = 2Re[\phi_4(z_4)] = 2Re[{}_0\phi_4(z_4) + \phi_{4r}(z_4)]. \cdots\cdots (1)$$

ここで、$\phi_{4r}(\zeta_4)$ は次式のように表される。

$$\phi_{4r}(\zeta_4) = A_{44} \cdot {}_0\overline{\phi}_4(1/\zeta_4). \cdots\cdots (2)$$

ここに、上式中の z_k および ζ_k は、写像関数 ω_k を介して次式のように関連づけられるものである。

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = \{(a - i\mu_k b)\zeta_k + (a + i\mu_k b)\zeta_k^{-1}\}. \quad \cdots (3)$$

だ円境界における温度境界条件は等温または断熱を設定しているが、孔境界における解析接続によって、それぞれの場合の未定係数 A_{44} は次式のように求められる。

$$\text{等温条件}\quad A_{44} = -1, \quad \text{断熱条件}\quad A_{44} = -\frac{\omega(\zeta_k)}{\overline{\omega(\zeta_k)}}. \quad (4)$$

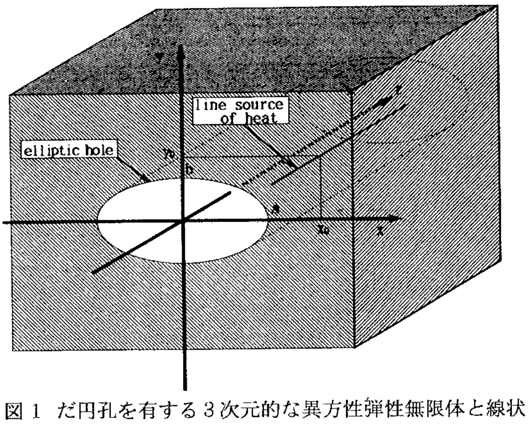

図１　だ円孔を有する３次元的な異方性弾性無限体と線状熱源

2.1　力学的境界条件

だ円孔境界における力学的境界条件については自由および固定を取り扱う。なお、下添字 k は、$k = 1, 2, 3$ および $k = 4$ についてはそれぞれ弾性および温度に関連するものであることを示す。

たとえば、自由境界条件については、次のように導けばよい。応力・変位に関する複素関数は温度に関する複素関数を考慮して次式のように設定する。

$$\phi_{kr}(\zeta_k) = \sum_{j=1}^{4} A_{kj} h_{kj} {}_0\overline{\phi}_j(1/\zeta_k). \cdots\cdots (5)$$

上式中の h_{kj} は k および j の組み合わせを考慮して、次式のように設定したものである。

$$h_{kj} = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \delta_{k3} + \delta_{k1}\delta_{j4}. \quad (k, j = 1,2,3,4) \cdots (6)$$

これを用いて、たとえば応力成分 σ_x, σ_y は次式のように表される。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re[\mu_1^2\phi_1(z_1) + \mu_2^2\phi_2(z_2) \\ &\qquad + \mu_3^2\lambda_3\phi_3(z_3) + \theta_1\phi_4(z_4)/\mu_4], \\ \sigma_y &= 2Re[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2) \\ &\qquad + \lambda_3\phi_3(z_3) + \theta_2\phi_4(z_4)]. \end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

ここに、

$$\lambda_1 = -\frac{\lambda_3(\mu_1)}{\lambda_2(\mu_1)}, \lambda_2 = -\frac{\lambda_3(\mu_2)}{\lambda_2(\mu_2)}, \lambda_3 = -\frac{\lambda_3(\mu_3)}{\lambda_4(\mu_3)}. \quad \cdots\cdots (8)$$

式 (7) 中のθ_1, θ_2, などは、線膨張率の応力への影響に関する係数であり、具体的には次式のようになる。

$$\theta_1 = \beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{14}\alpha_4 + \beta_{15}\alpha_5 + \beta_{16}\alpha_6. \quad \cdots\cdots (9)$$

ここに、上式中のβ_{ij}は弾性コンプライアンスである。

応力成分を適切に積分することにより、合力 P_x, P_y および P_zが得られ、応力自由の境界条件を達成ずるためにはこれらが零となればよい。具体的には次式のような連立方程式となる。

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\lambda_3 \\ 1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{Bmatrix} \quad \cdots (10)$$

ここに、

$$\left.\begin{aligned} b_{1i} &= -(\delta_{1i} + \delta_{2i} + \delta_{3i}\overline{\lambda_3})\overline{\mu_i} - \delta_{i4} \cdot \theta_x/\mu_4 A_{44}, \\ b_{2i} &= -(\delta_{1i} + \delta_{2i} + \delta_{3i}\overline{\lambda_3}) - \delta_{i4} \cdot \theta_y A_{44}, \\ b_{3i} &= -(\delta_{1i}\overline{\lambda_1} + \delta_{2i}\overline{\lambda_2} + \delta_{3i}) - \delta_{i4} \cdot \theta_{yz} A_{44}. \\ & \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

ここで、上記の境界条件から得られる条件式の個数は未定係数の個数と一致するので、応力および変位は一意に決定されることになる。

一方、変位成分については次式のように表される。

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 2Re[\sum_{k=1}^{4} p_k \Phi_k(z_k)], \\ u_y &= 2Re[\sum_{k=1}^{4} q_k \Phi_k(z_k)], \\ u_z &= 2Re[\sum_{k=1}^{4} r_k \Phi_k(z_k)]. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

固定境界条件を達成するためには、上式の変位成分がだ円孔境界上で零となればよい。詳細はここでは省略するが、固定境界条件の場合においても条件式数と未定係数の個数が一致し、一意に場の量が決定されることになる。

3　だ円孔を有する無限体内の温度、応力および変位場

本研究の温度場に関する微分方程式が $Poisson$ 型の方程式で得られ、熱源が存在する問題については解が対数関数で表されることを踏まえて複素関数$\phi_k(z_k)$ を以下のように設定する。

まず、基本関数${}_0\phi_k(z_k)$ を次式のようにおく。

$$\left.\begin{aligned} {}_0\phi_k(z_k) &= \Gamma_k \ln \frac{z_k - z_{k0}}{\hat{d}_k}, \\ z_k &= x + \mu_k y, z_{k0} = x_0 + \mu_k y_0 = \omega(\zeta_{k0}), \\ z_0 &= x_0 + iy_0 = \omega(\zeta_0) = R_0(\zeta_0 + m\zeta_0^{-1}), \\ R_0 &= \frac{1}{2}(a+b), m = \frac{a-b}{a+b}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

${}_0\phi_k(z_k)$ をζ−平面に写像した場合には、式 (??) の第１式は次式のように表される。

$${}_0\phi_k(\zeta_k) = \Gamma_k \ln \frac{\zeta_k - \zeta_{k0}}{d_k}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

ここに、ζ_{k0}は熱源作用位置 z_{k0}をζ平面に写像した点である。

最終的に$\phi_k(\zeta_k)$ は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \phi_k(\zeta_k) &= {}_0\overline{\phi}_k(\zeta_k) + \phi_{kr}(\zeta_k) \\ &= \Gamma_k \ln \frac{\zeta_k - \zeta_{k0}}{d_k} \\ &+ \sum_{j=1}^{4} h_{kj} A_{kj} \overline{\Gamma}_j \{\ln \frac{\zeta_j - 1/\overline{\zeta}_{j0}}{d_j} - \ln \zeta_j\} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

上式中の未定係数$\Gamma_k (k = 1, 2, 3)$ は応力および変位の一価性により、また、Γ_4については温度場の一価性および次式により決定される。

$$\oint f_n ds = W(x, y). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

ここでも条件式数と未定係数の数は一致し、係数Γ_kが一意に決定される。

以上により、すべての未定係数が決定され、温度、応力および変位成分が得られたことになる。

4　結言

本研究ではだ円孔を有する３次元異方性弾性無限体に線状熱源が作用する問題の解析解を誘導した。ここで得られた解は閉じた型の解であり、境界要素法あるいは体積力法などの数値解析法の基本解として利用されうるものである。ここでは紙面の関係上解析解の概要の提示にとどまったが、数値計算例については、講演会当日発表する。

参考文献

[1] 福井・福井・海堀, 円孔を含む無限平板に熱発生源をもつ場合の熱応力, 機論（第１部）'69,1772.

[2] 川久保・平島, 楕円形空孔または介在物を有する異方性弾性体の面外荷重問題に対する解析解と数値計算例, 機論（Ａ編）投稿中