Ⅰ－136　正規分布の裾切りを有する条件付確率場の補間

鳥取大学大学院　学生会員　石原　尚之
鳥取大学工学部　　正会員　野田　　茂

1. まえがき

近年、観測データが有限地点で与えられたとき、未観測点での物理量を推定する条件付確率場の理論が注目されている。この補間理論は工学的諸問題を解決する上で必要不可欠であり、これまでにも数多くの研究[1)]がなされてきた。しかし、観測データの頻度分布を求めてみると、正規分布の下端を裾切りしたような分布形となることがある。このためには、物性値に関して、負の領域を考慮しない条件付確率場の研究をしなければならない。既往の研究では、このような確率場の補間問題に対しても、正規確率場の理論をそのまま踏襲している。

そこで、本研究では、正規分布の裾切りを有する確率場において、観測データが与えられた条件下で、未観測点における特性値（条件付平均値、条件付分散と推定誤差分散）を誘導し、簡単な分析を行う。

2. 条件付確率密度関数による算定

n 地点での確率量 $x_i(i=1\sim n)$ に対し、正規確率密度関数を $g(x_1,\cdots,x_n)$ とすると、裾切りを有する確率密度関数 $tg(x_1,\cdots,x_n)$ は、

$$tg(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{1-\Phi}\cdot g(x_1,\cdots,x_n) \qquad (1)$$

$$\Phi=\int_{-\infty}^{0}\cdots\int_{-\infty}^{0}g(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n \qquad (2)$$

で与えられる。

$(n-1)$ 地点において観測データ $(\underline{x}_1,\cdots,\underline{x}_{n-1})$ が与えられた条件下で、未観測点 n での確率量 x_n に対する条件付確率密度関数を $tg(x_n|cond)$ とする。ここでは、確率変数のベクトル $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ を、その共分散行列の固有ベクトルよりなる行列 $T=[t_1,\cdots,t_n]$ を用いて、$y=T^{-1}x(y=(y_1,\cdots,y_n)^T)$ のように変換する。ただし、変換されたデータを $(\underline{y}_1,\cdots,\underline{y}_{n-1})$ 、y_n の平均値を $\bar{y}_n$ 分散を $\sigma_{y_n}^2$ で表す。このように設定すると、$tg(x_n|cond)$ は式(3)のようになる。

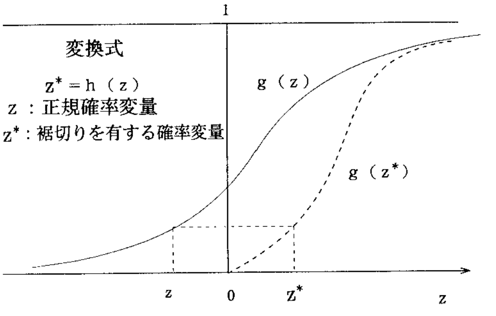

図1 正規確率変量と分布形の裾切りを有する確率変量

$$tg(x_n|cond)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}W_n\sigma_{y_n}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n-\bar{y}_n}{\sigma_{y_n}}\right)^2\right\} \qquad (3)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}W_n&=1-P\left(-\tfrac{\bar{y}_n}{\sqrt{2}\sigma_{y_n}}\right)\\ P(x)&=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2}du\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

式(3)を用いると、x_n の条件付平均値は式(5)で、条件付分散は式(6)のように表せる。ただし、t_{ni} は固有ベクトル t_i の要素である。

$$\begin{aligned}m_Y(x_n|cond)&=\int_0^{\infty}x_n\cdot tg(x_n|cond)dx_n\\ &=\frac{t_{nn}\cdot\sigma_{y_n}}{\sqrt{2\pi}W_n}\cdot\exp\left(-\frac{\bar{y}_n^2}{2\sigma_{y_n}^2}\right)+t_{nn}\cdot\bar{y}_n+\sum_{k=1}^{n-1}t_{nk}\cdot\underline{y}_k\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2(x_n|cond)&=\int_0^{\infty}(x_n-m_Y(x_n|cond))^2\cdot tg(x_n|cond)dx_n\\ &=\left(\sum_{k=1}^{n-1}t_{nk}\cdot\underline{y}_k\right)^2+t_{nn}^2\cdot\bar{y}_n^2+\frac{t_{nn}^2}{W_n}\cdot S_n\end{aligned} \qquad (6)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}S_n&=2\sigma_{y_n}^2\cdot Q\left(-\tfrac{\bar{y}_n}{\sqrt{2}\sigma_{y_n}}\right)+\tfrac{\sqrt{2}\sigma_{y_n}\cdot\bar{y}_n}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp\left(-\tfrac{\bar{y}_n^2}{2\sigma_{y_n}^2}\right)\\ Q(x)&=\int_{-\infty}^{x}u^2\cdot e^{-u^2}du\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

3. クリッギング理論による算定

分布形の裾切りを考慮すると、正規分布 $g(z)$ と非正規分布 $g(z^*)$ の関係は図１のようになる。そこで、ここでは、この関係を利用して、条件付非正規確率場を正規確率場に変換した上で、補間問題を考える。式 (2) の Φ と式 (4) の P を用いると、正規確率変量 z と非正規確率変量 z^* は次の関係で表せる。

$$z^* = P^{-1}\left\{(1-\Phi)P(z) - \Phi\right\} \tag{8}$$

ここでは、上式を用いて、裾切りを有する条件付確率場の補間問題を議論する。便宜上、式 (8) を $z^* = h(z)$ と表示する。

今、未観測点 n における物性値 $\widehat{Y}(z_n)$ を求めるため、$z^* = h(z)$ の関係式を利用して、$h^{-1}(\widehat{Y}(z_n))$ に対応する $\widehat{W}(z_n)$ を式 (9) のように表す。ただし、$W(z_i)$ は観測点 $i(i = 1 \sim n-1)$ での値、f と $\lambda_i(i = 1 \sim n-1)$ は未知定数である。

$$\widehat{W}(z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i W(z_i) + f \tag{9}$$

式 (8) を用いると、未観測点 n における推定値は次のように表せる。

$$\begin{aligned}\widehat{Y}(z_n) &= h\left(\widehat{W}(z_n)\right)\\ &= h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot W(z_i) + f\right)\end{aligned} \tag{10}$$

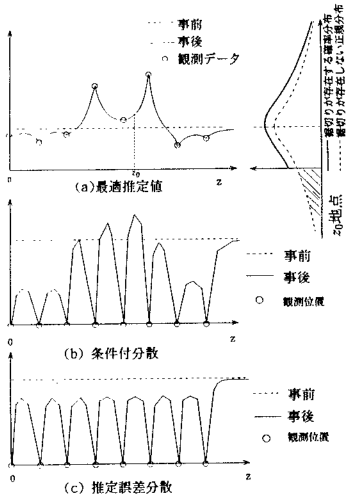

図2　クリッギングによる補間

ここで、未知係数 f は不偏推定かつ最小誤差分散の条件を満たすように決定される。

推定誤差分散は、式 (12) を用いると、式 (11) によって求められる。

$$\sigma^2(\widehat{Y}(z_n) - Y(z_n)) = \sigma^2(\widehat{Y}(z_n)) + \sigma^2(Y(z_n)) - 2C(\widehat{Y}(z_n), Y(z_n)) \tag{11}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2(\widehat{Y}(z_n)) &= \sigma^2\left(h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot W(z_i) + f\right)\right)\\ C(\widehat{Y}(z_n), Y(z_n)) &= C\left(h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot W(z_i) + f\right), h(W(z_n))\right)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

なお、$\sigma^2(\widehat{Y}(z_n))$ は非正規確率場における未観測点 n での推定誤差分散、$C(\widehat{Y}(z_n), Y(z_n))$ は $\widehat{Y}(z_n)$ と真値 $Y(z_n)$ の共分散である。

式 (11) の推定誤差分散を最小とする重み係数 $\lambda_k(k = 1 \sim n-1)$ は、式 (13) の非線形連立方程式を解くことによって求められる。

$$\frac{\partial\sigma^2\left(h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot W(z_i) + f\right)\right)}{\partial\lambda_k} - 2\frac{\partial C\left(h\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot W(z_i) + f\right), h(W(z_n))\right)}{\partial\lambda_k} = 0 \tag{13}$$

以上より、求めた重み係数 $\lambda_k(k = 1 \sim n-1)$ を式 (10) と式 (11) に代入すれば、最適推定値と最小推定誤差分散が得られる。

4. あとがき

本理論展開より、次のことがわかった。

1) 裾切りを有する確率場 (図 2(a)) における条件付平均値と条件付分散は、式 (5) と (6) よりわかるように、観測データに依存する。最適推定値 (条件付平均値)、条件付分散と推定誤差分散は図 2 の関係のようになる。
2) 正規確率場では条件付分散と推定誤差分散が一致する。しかし、非正規確率場において、両者は図 2(b) と図 2(c) のように異なる特性を示す。従って、正規分布の裾切りを有するような条件付確率場において、補間問題の本質を考えずに正規確率場の補間式をそのまま適用すると、誤った解を与えることになる。
3) **3.** で述べたようなクリッギングの補間理論を用いると、最適推定値と推定誤差分散を容易に誘導することができる。
4) 各理論式は、複雑であって無関係のように見えるが、お互いに関連している。

本研究では裾切りを有する正規確率場での補間理論の式展開を行った。今後は、数値計算を実行し、本理論の妥当性を調べていく予定である。

参考文献

1) Noda,S. and Hoshiya,M.:Updating of lognormal stochastic field, Submitted to the Journal of Engineering Mechanics, A.S.C.E., for review and possible publication on December 1994.