

I-96

逆対称積層円筒パネルの振動解析について

大同工業大学工学部 正会員 ○水澤富作
大同工業大学大学院 高橋真貴

1. はじめに 厚さ方向に非等質であり、また強い異方性を示す一方向繊維強化複合材料(FRP)は、軽量化、耐衝撃性や耐腐食性などに優れ、以前から航空宇宙や自動車産業などで広く用いられている。繊維強化型積層円筒パネルでは、厚さ方向のせん断変形をより厳密に考慮する必要があるが、高次のせん断変形の影響を考慮した積層シェル理論に基づく振動解析は少ないように思われる。Librescu¹⁾は、Reddy²⁾の高次せん断変形理論に基づくDonnellの偏平シェル理論と State Space Concept法を用いて、逆対称クロス・プレイ積層円筒パネルの振動解析を行っているが、境界条件に大きな制限がみられ、より信頼性の高い数値解析法の開発も重要な課題と思われる。

本文では、3次の横せん断変形を考慮したDonnellの偏平シェル理論に基づくスプライン帯板法を提案し、逆対称クロス・プレイ積層円筒パネルや逆対称アングル・プレイ積層円筒パネルの振動解析を行い、一次せん断変形積層シェル理論による解⁴⁾と比較検討を行う。また、本手法の解の収束性や解析精度について検討を行い、積層円筒パネルの振動特性に与える積層数、弾性係数比、 E_1/E_2 、シェル厚比、 t/R 、パネル長比、 L/R 、偏平角、 ϕ や境界条件などの影響についても明かにしている。

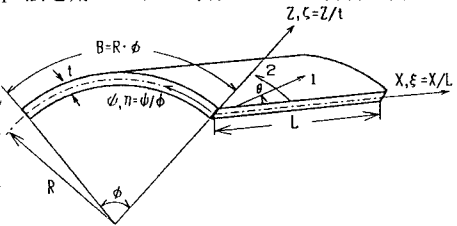


Fig.1 Composite laminated cylindrical panel and co-ordinate systems

2. 解析手法 Fig. 1に示す偶数層から成る積層円筒パネルの振動解析を行うために、高次せん断変形理論とDonnellの偏平シェル理論に基づくスプライン帯板法を用いて式の定式化を行っている。積層円筒パネルでは、各積層が直交異方性材料から成り、それぞれ完全に接着しているものと仮定する。材料主軸(1, 2)方向の弾性係数を E_1, E_2 、ポアソン比を ν_{12} 及びせん断弾性係数を G_{12}, G_{13}, G_{23} で表す。また、面内剛性 A_{ij} 、曲げ剛性 D_{ij} 、横せん断剛性 A_{ij} 、曲げ一面内連成剛性 B_{ij} や高次の剛性値 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} は次式で定義される。

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-0.5}^{0.5} Q_{ij} \{1, (z/t), (z/t)^2, (z/t)^3, (z/t)^4, (z/t)^6\} dz \quad \dots (1)$$

ここで、 Q_{ij} は(n)層での弾性係数、 t_n はシェル中央面からの各積層面までの距離である。式の定式化では、無次元の円筒座標系; $\xi = X/L$, $\eta = \phi/\phi$, $\zeta = Z/t$ を用いる。ここで、 L は円筒パネル長、 t はシェル厚、 ϕ は偏平角である。したがって、3次せん断変形理論では、それぞれ独立した次式のような変位関数が仮定される。

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= t [U(\xi, \eta) + \zeta \chi x(\xi, \eta) - (4/3)\zeta^3 \{(t/L)\partial W(\xi, \eta)/\partial \xi + \chi x(\xi, \eta)\}] \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= t [V(\xi, \eta) + \zeta (t/R)V(\xi, \eta) + \zeta \chi \phi(\xi, \eta) - (4/3)\zeta^3 \{(t/R\phi)\partial W(\xi, \eta)/\partial \eta + \chi \phi(\xi, \eta)\}] \dots (2) \\ w(\xi, \eta, 0) &= t W(\xi, \eta). \end{aligned}$$

ここで、 U と V は面内変位、 χx と $\chi \phi$ は回転角、 W はたわみを示す。

次に、高次せん断変形理論に基づくDonnellの偏平シェル理論で定義される垂直及びせん断ひずみを無次元座標系で表せば、

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\phi\phi} \\ \gamma_{x\phi} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\phi z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_{o\phi} \\ \gamma_{ox\phi} \\ \gamma_{oxz} \\ \gamma_{o\phi z} \end{Bmatrix} + (z/t) \begin{Bmatrix} K_{1x} \\ K_{1\phi} \\ K_{1x\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + (z/t)^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{2xz} \\ K_{2\phi z} \end{Bmatrix} + (z/t)^3 \begin{Bmatrix} K_{3x} \\ K_{3\phi} \\ K_{3x\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (3)$$

で与えられる。ここで、 $\varepsilon_{ox} = (t/L)\partial U/\partial \xi$, $\varepsilon_{o\phi} = (t/R\phi)\partial V/\partial \eta + (t/R)W$, $\gamma_{ox\phi} = (t/R\phi)(\partial U/\partial \eta) + (t/L)(\partial V/\partial \xi)$, $\gamma_{oxz} = \chi x + (t/L)\partial W/\partial \xi$, $\gamma_{o\phi z} = \chi \phi + (t/R\phi)\partial W/\partial \eta$, $K_{1x} = (t/L)\partial \chi x/\partial \xi$, $K_{1\phi} = (t/R\phi)\partial \chi \phi/\partial \eta$, $K_{1x\phi} = (t/L)\partial \chi \phi/\partial \xi + (t/R\phi)\partial \chi x/\partial \eta$, $K_{2xz} = -4\{\chi x + (t/L)\partial W/\partial \xi\}$, $K_{2\phi z} = -4\{\chi \phi + (t/R\phi)\partial W/\partial \eta\}$, $K_{3x} = -(4/3)\{(t/L)^2 \partial^2 W/\partial \xi^2 + (t/L)\partial \chi x/\partial \xi\}$, $K_{3\phi} = -(4/3)\{(t/R\phi)^2 \partial^2 W/\partial \eta^2 + (t/R\phi)\partial \chi \phi/\partial \eta\}$, $K_{3x\phi} = -(4/3)\{2(t/L)(t/R\phi)\partial^2 W/\partial \xi \partial \eta + (t/R\phi)\partial \chi x/\partial \eta + (t/L)\partial \chi \phi/\partial \xi\}$ である。

したがって、全ポテンシャル Π を求め、これを最小化すれば、基礎方程式が導かれる。なお、相対する2辺が単純支持された場合には、固有関数の直交性により、各級数項ごとに固有値解析が行える。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、円周方向に平行な2辺が単純支持された逆対称積層円筒 π の振動特性に与える積層数、弾性係数比、シェル厚比や境界条件などの影響について解析する。数値計算で用いた複合材料は、 $\text{K}^{\circ}\text{ラフイト}/\text{E}^{\circ}\text{キ}$ の一方強化材であり、次のような材料特性を仮定している。

$E_1/E_2=5-40$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.5$, $G_{23}=0.2$, $\nu_{12}=0.25$ 。はじめに、解の収束性に与える帯板分割数や π ライン次数の影響を調べるために、周辺単純支持された2層からなる逆対称クロス π ライン積層円筒 π （ $E_1/E_2=25$, $t/L=0.1$, $B/L=0.1$, $R/L=10$ ）の振動解析を行った。その結果、高次の π ライン帯板 π を用いれば、少ない要素数でも安定した収束状態が得られている。

Table 1 では、単純支持された逆対称 π ライン積層円筒 π （ $E_1/E_2=40$, $t/L=0.05$, $B/L=1.0$ ）の振動数パラメータの精度比較が示されている。比較のために、一次せん断変形理論に基づくDonnellのシェル理論を用いた値⁴⁾とGalerkin法による結果³⁾も示してある。これより、良く一致した結果が得られている。

Fig. 2は、種々の境界条件を持つ逆対称 π ライン積層円筒 π （ $B/L=1.0$, $t/L=0.1$, $R/L=5$, $E_1/E_2=40$ ）の振動数パラメータ $n^*=\omega\sqrt{\rho t^2/E_2}$ に与える積層数 N と配向角 θ の影響を示している。また、比較のために、一次せん断変形理論による結果(FSDT)も図示してある。これより、積層数や境界条件により、高次せん断変形理論と一次せん断変形理論による値に差がみられ、また、その差は配向角に大きく依存している。せん断修正係数を適用する一次せん断変形理論では、非等質な積層構造をもつ問題では、その値の評価法と値の選定が重要な問題と思われる。また、積層数を高めると、その影響が急激に小さくなっていくが、配向角を変化させることにより、振動数（剛性）を自由に変化させることができる。

4. あとがき

本文では、高次の横せん断変形を考慮したDonnellの偏平シェル理論に基づく π ライン帯板法を用いて、積層複合円筒 π の振動解析を行い、主として、一次せん断変形理論との比較検討を行った。主な結果を示すと以下になる。

- 1) 高次せん断変形シェル理論と一次せん断変形シェル理論により求められた値を比較すると、境界条件の拘束が大きな場合、大きなシェル厚比や大きな弾性係数比をもつ場合に、両者の差が大きく生じるので、高次せん断変形理論を適用する意義がある。
- 2) 逆対称クロス π ライン積層円筒 π では、積層数が小さいほど高次せん断変形シェル理論と一次せん断変形シェル理論による値の差がみられ、振動数パラメータは偏平角と積層数に大きく依存している。
- 3) 逆対称 π ライン積層円筒 π では、配向角の影響によって高次せん断変形シェル理論と一次せん断変形シェル理論による結果に大きな差が見られ、境界条件の拘束が大きいほど、その差が顕著に見られる。

なお、本研究は、平成6年度内藤科学技術財団の補助金を受けている。

参考文献

- 1) Librescu, A.A. et al.: A shear deformable theory of laminated composite shallow shell... *Acta Mech.*, **76**, 1-33, 1989.
- 2) Reddy, J.N. et al.: *Int. J. Eng. Sci.*, **23**, pp. 319-330, 1985.
- 3) Soldatos, K.P.: Influence of ..., *JSV*, **119**, 111-137, 1987.
- 4) 水澤、鬼頭: Vibration of antisymmetric angle-ply cylindrical panels by the spline strip method. *Comput. and Struct.*, 1995.

Table 1 Accuracy comparison of frequency parameters. $n^*=\omega b^2\sqrt{\rho/E_2 t^3}$ for antisymmetric angle-ply laminated cylindrical panel; $b/L=1.0$, $t/L=0.05$, $E_1/E_2=40$, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.5E_2$, SS-SS

ϕ (°)	θ (°)		The number of lamina		
			N=2	N=4	N=∞
30		Present	18.68	24.16	25.68
		FSDT ⁴⁾	18.87	24.27	25.67
		FSDT ³⁾	18.80	24.16	25.61
20	45	Present	26.46	31.28	32.74
		FSDT	26.84	31.49	32.74
		FSDT	26.65	31.26	32.57
60		Present	35.72	38.94	39.95
		FSDT	35.94	39.06	39.95
		FSDT	35.37	38.53	39.47
30		Present	23.54	28.06	29.37
		FSDT	23.69	28.16	29.37
		FSDT	23.52	27.99	29.26
30	45	Present	36.53	40.14	41.30
		FSDT	36.82	40.32	41.30
		FSDT	36.48	40.01	41.05
60		Present	51.22	53.52	54.26
		FSDT	51.38	53.61	54.26
		FSDT	50.21	52.69	53.40

FSDT: the values obtained by Spline method based on Donnell's shell theory with uniform shear deformation. FSDT: the values obtained by Galerkin method based on Love's shell theory with parabolic shear deformation

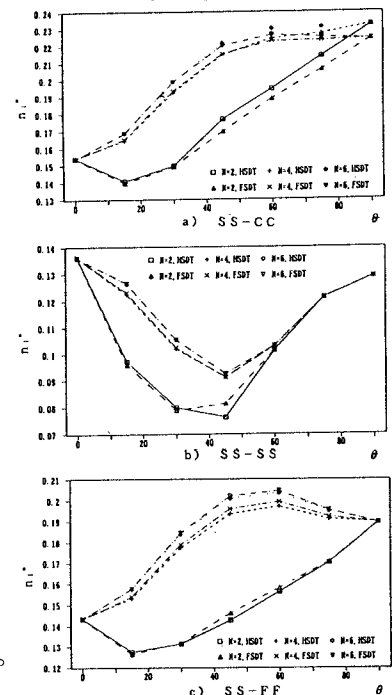


Fig. 2 The effect of lamination angle, θ on n^* of antisymmetric angle-ply circular cylindrical panels.