

I - 94

1次せん断変形を許容する板よりなる折板構造の弾性論解析法

東京理科大学 学生員 林 健彦
正 員 白木 恒雄

1. まえがき

折板構造の「弾性法(Elasticity Method)」とは、板曲げ問題と平面応力問題を支配方程式では連成させず、稜線境界条件でのみ相関させる解析法であり¹⁾、仮定の範囲内で厳密解といえる。従来の「弾性法」の板曲げ問題では、古典(Kirchhoff/Love)板曲げ理論を用いる。これは、微小板厚、微小たわみ、せん断変形の無視などの仮定を前提としているため、板厚増加に伴うせん断変形の影響、および換算せん断力による板端応力値の信頼性低下などの問題点がある。そこで、これらの仮定を用いないより一般性の高い弾性平板の理論が種々提案されている。本報告は、古典 K/L板曲げ理論の次の段階として、Reissner/Mindlin のごとき1次せん断変形板理論^{2), 3)}を用い、従来より精度及び整合性の高い「弾性法」解析を提案するものである。板そのものの解析はすでに多くの高次せん断変形板理論が存在するが、折板構造で、1次せん断変形板理論と平面応力理論とを併せ解析を行った研究は著者の知る限りではない。

2. 解析の概要

従来の「弾性法」の古典 K/L板曲げ理論では、ねじりモーメントを等価な偶力に置き換え、せん断力とあわせて換算せん断力として扱う。本研究ではせん断変形を考慮することにより、力学的にあいまいな換算せん断力の概念を用いず、ねじりモーメントとせん断力を独立の断面力として扱うことになる。すると、折板の接合部で新たにねじりモーメントのつり合い条件が要求されることになる。その要求を満足するためには、平面応力状態の板に対して面内偶応力の存在を認めることになる。そこで、従来の Airy の応力関数を用いる平面応力理論に相当するものとして、Mindlin の偶応力理論⁴⁾を採用することにした。

従来の「弾性法」の特徴は、古典 K/L板曲げ理論と Airy の応力関数を用いる平面応力問題の理論的アナロジー性である。それぞれに重調和方程式が1本存在する4次の理論である。このアナロジー性を保持させながら、板のせん断変形を考慮するには、R/M 板曲げ理論よりも Marguerre/Woernle の板曲げ理論⁵⁾のほうが対応性が良好なため、これに若干の工夫を加えた以下の理論式を用いた。

<平面応力問題>

$$\nabla^2 w_s = -\Phi_s$$

$$\nabla^2 \Phi_s = -(1-\nu)\nabla^2 V$$

$$\nabla^2 \Psi_s - \frac{1}{l^2} \Psi_s = 0$$

<板曲げ問題>

$$\nabla^2 w = -\Phi_b - \frac{q}{Gt_s}$$

$$\nabla^2 \Phi_b = -\frac{q}{K}$$

$$\nabla^2 \Psi_b - \frac{2}{(1-\nu)h^2} \Psi_b = 0$$

それぞれに3本の偏微分方程式が存在する6次の理論となる。

3. 数値計算例

代表的折板構造として、鉛直方向に断面对称軸をもつ単純支持1室 PC 箱桁橋 (Fig. 1) を扱い集中および分布曲げ荷重あるいは均し荷重を作用させて、応力分布を調べ、従来の弾性法の結果と比較検討した。通常通り、板のたわみ関数、応力関数、

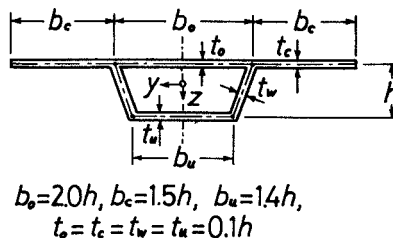


Fig. 1

分布荷重関数などはすべて Fourier級数で表現している。

解析は、荷重の対称性および逆対称性を利用することとし、断面の半分のみ解いた。上フランジに張り出しを持つ1室箱桁の半分は4枚の板よりなるから、この各板ごとに上記2種類の6次の理論を適用すると、級数項ごとに $2 \times 6 \times 4 = 48$ 個の積分定数を生じ、それを各板両端の力のつり合いと変位の連続の条件を満足するように定めた。用いた材料の縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比は次のごとくなる。 $E = 34.3\text{GPa}$ ($3.5 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$), $G = 14.7\text{GPa}$ ($1.5 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$), $\nu = 1/6$ 。なお、偶応力理論は微細構造を初歩的な形でとり入れたコッセラ弾性理論と位置づけられるため、長さの次元を持つ新たな材料定数 l の設定値が必要となる。しかし、材料の結晶粒の寸法といわれるこの値の実験値は、正しく測定されていないのが現状である⁶⁾。アルミニウムで 0.05mm 程度、人骨で 0.1mm 程度ではないかと言われている。プレストレストコンクリート材料の予測値は不明であるため、この l 値をここでは便宜的に 0.01mm とおいた。

単純はりの中央に集中曲げ荷重がかかる場合 (Fig. 2), 载荷位置断面の軸方向垂直応力, 断面内垂直応力, 断面内せん断応力, 板のねじりモーメント, 板のせん断力の分布 (Fig. 3) を与える。この断面を構成する板は比較的薄いため、従来の弾性法の結果と大差ない結果となった。しかし、板厚を増加させてゆくと、せん断変形の影響は顕著となった。前述の材料定数 l の影響をみるため、他の材料定数は固定したままで l の値を $1000 \sim 0.001\text{mm}$ まで変化させてみた。载荷断面の上フランジとウェブの接合位置の軸方向垂直応力 σ_x と材料定数 l の関係 (Fig. 4) をみると、 l が 1mm 以下では σ_x の値がまったく変化しないことがわかる。他の状態量に関しても同様のことが言える。したがって、 l 値は実験的に正しく求められずとも、その概略値の範囲さえ把握しておけば、解析上不都合は生じないことがわかる。

4. まとめ

「1次せん断変形板曲げ理論」と「偶応力を考慮した平面応力理論」にアナロジー関係を設定した。②従来より整合性の高い理論により、せん断力とねじりモーメントを独立の断面力として求められた。③材料定数 l 値が特定できずとも、正確な解析値の求められることを確認できた。

5. 参考文献

- 1) 岡村：骨組解析法要覧，培風館，P. 415，1976。
- 2) Reissner: J. Appl. Mech., Vol. 12, P. A-69, 1945.
- 3) Mindlin: J. Appl. Mech., Vol. 18, P. 31, 1951.
- 4) Mindlin: Exp. Mech., Vol. 3, P. 1, 1963.
- 5) マルゲール・ウエーレン：弾性平板，培風館，1974。6) 岡村：強度解析学 [I]，オーム社，P. 256，1985。

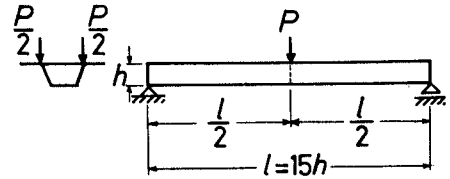


Fig. 2

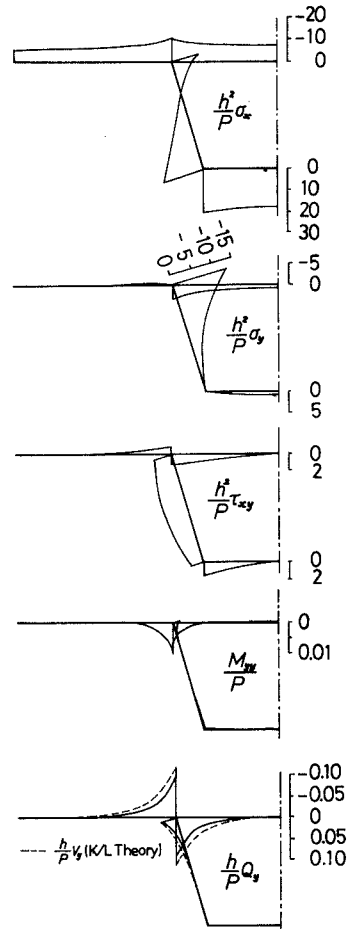


Fig. 5

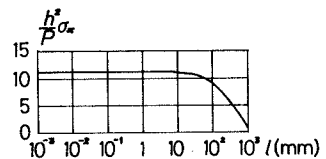


Fig. 4