I -93

せん断変形を考慮した積層板の簡易曲げ解析について

早稲田大学理工学部　正員　依田照彦
日立造船（株）　正員　生田芳子

1．はじめに

せん断変形を考慮した積層板の歴史は古く，Reissner，Mindlinらによって始められた板理論からReddyらによる積層板の１次，あるいは高次のせん断変形理論に至るまで数多くの研究成果が報告されている[1]．その結果，現在では積層板の線形問題の解析は容易に行える状況にある．しかしながら，積層板の非線形解析を行う場合には，高次のせん断変形理論では煩雑すぎるうらみが残る[2]．

本報告の目的はせん断変形を考慮した板の曲げ解析をできるだけ簡易に行い，かつ，せん断応力，曲げ応力等の分布が正確に算出できる簡易解析法を提案することにある．このために設けた主な仮定は次の通りである．(1)積層板を層の数より多く分割し，各層内の変位分布を線形近似する．(2) 各層間では，はくりはなく，連続体として変位および応力は連続する．この仮定の結果，弾性解析の基本式が簡単になり，異種材料よりなる積層板の解析や非線形解析が容易になると考えられる．

2．理論式の誘導

弾性体の基礎式であるひずみ-変位関係式，構成則および応力のつり合い式から，各層の上下面における変位：$u_1^i, u_1^{i+1}, u_2^i, u_2^{i+1}, u_3^i, u_3^{i+1}$,応力：$\sigma_{13}^i, \sigma_{13}^{i+1}, \sigma_{23}^i, \sigma_{23}^{i+1}, \sigma_{33}^i, \sigma_{33}^{i+1}$,板厚：$h_i$の間の関係式を求める．ここに変位成分は各層内では板厚方向に直線的に変化する．この関係式をもとに変分法を用いて，板の支配方程式を求め数値解析をおこなう．解析の方法としてはGalerkin法を用いている．

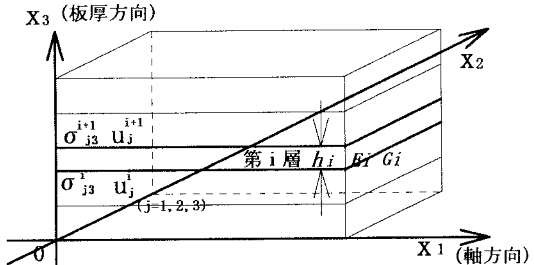


図 1　積層板

3．数値計算例

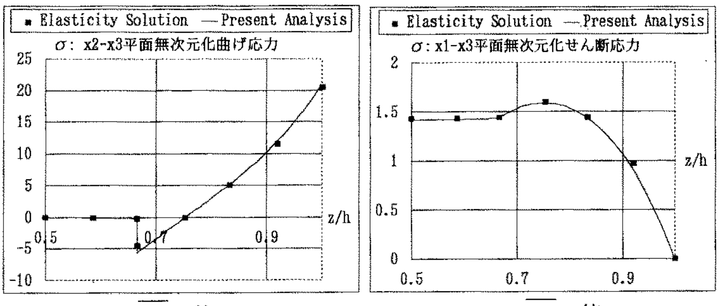
本解析法の妥当性を検討するために，既往の研究成果との比較を行った[2),3)]．

図２に正弦波形の分布荷重$q(x_1)=q_0\sin(\pi x_1/a)$を受ける２辺単純支持板の解析結果を，弾性論にもとづく厳密解とともに示す．板の形状は板厚と辺長の比（h/a）が0.25の正方形３層直交異方性積層板（主軸方向0°/90°/0°）であり，各層の材料定数は$E_{11}/E_{22}=25, G_{12}/E_{22}=G_{13}/E_{22}=0.5, G_{23}/E_{22}=0.2, \nu_{12}=0.25, \nu_{23}=0.49$である．ただし E_{11}, E_{22}：主軸方向および横方向ヤング率 G_{12}, G_{13}, G_{23}：せん断弾性係数 $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$：ポアソン比である．図２によれば本解析法が弾性論にもとづく解に近い値を与えていることが分かる．ただし本報告では板厚方向の座標x_3をz/hと無次元化している．

次に図３に正弦波形の分布荷重$q(x_1,x_2)=q_0\sin(\pi x_1/a)\sin(\pi x_2/a)$を受ける４辺単純支持板の解析結果を，弾性論にもとづく厳密解とともに示す．板はh/aが0.2の正方形10層直交異方性板（主軸方向 0°/90° が交互）である．各層の材料定数は$E_{11}/E_{22}=30, G_{12}/E_{22}=G_{13}/E_{22}=0.5, G_{23}/E_{22}=0.35, \nu_{12}=0.3, \nu_{23}=0.49$である．図３の結果は，多層の積層板であっても層の数以上に多くの分割（この計算例では100分割）を行えば，十分良い精度の解を求めることができることを示している．ここで図中の無次元化量は次式による．

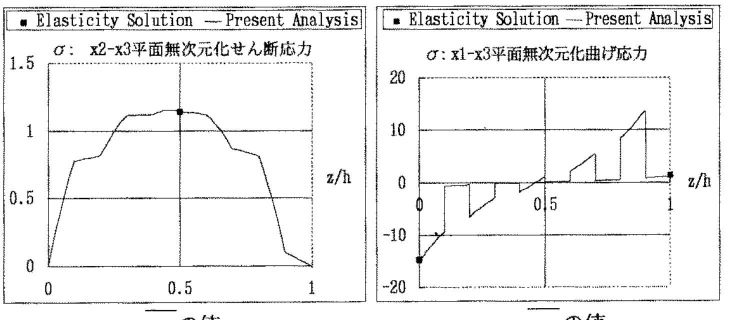
$$\overline{\sigma_{11}}=\sigma_{11}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},x_3\right)\Big/q_0,\ \overline{\sigma_{22}}=\sigma_{22}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},x_3\right)\Big/q_0,\ \overline{\sigma_{33}}=\sigma_{33}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},x_3\right)\Big/q_0,\ \overline{\sigma_{12}}=\sigma_{12}(0,0,x_3)/q_0,\ \overline{\sigma_{13}}=\sigma_{13}\left(0,\frac{a}{2},x_3\right)\Big/q_0$$

$$\overline{u_3}=u_3\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},x_3\right)\cdot E_{11}\Big/q_0,\ \overline{\sigma_{23}}=\sigma_{23}\left(\frac{a}{2},0,x_3\right)\Big/q_0,\ \overline{u_2}=u_2\left(\frac{a}{2},0,x_3\right)\cdot E_{11}\Big/q_0$$

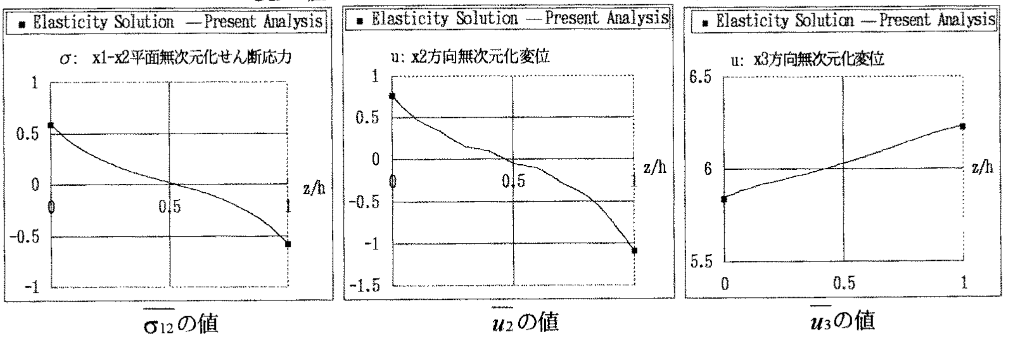


$\overline{\sigma_{11}}$の値　　$\overline{\sigma_{13}}$の値

図２　３層２辺単純支持板の無次元化応力



$\overline{\sigma_{23}}$の値　　$\overline{\sigma_{22}}$の値



$\overline{\sigma_{12}}$の値　　$\overline{u_2}$の値　　$\overline{u_3}$の値

図３　10層４辺単純支持板の無次元化応力と変位

４．結言

本報告では，せん断変形を考慮した積層板の曲げ解析を，従来の高次せん断変形理論を用いた場合よりも簡明で実用的な方法で行うことを試みた．その結果，すべての変位成分を層内で線形近似したとしても，層の数をある程度多くとれば十分な精度で板厚方向のせん断応力や垂直応力が求められることが分かった．また，この簡易手法は，積層板の非線形解析にも適用可能であると考えられる．

参考文献

1)K.Marguerre and H.-T. Woernle：弾性平板，培風館，1974年
2)T.Yoda and S.N.Atluri：Postbuckling analysis of stiffened laminated composite panels,using a higher-order shear deformation theory,Computational Mechanics,Vol.9(1992)
3)A.K.Noor and W.S.Burton：Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates, Composite Structures,Vol.11(1989)