土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

Ⅰ－90　厚肉シェルの有限変形問題における変分原理

群馬工業高等専門学校　正会員　末　武　義　崇
ジョージア工科大学　S. N. A t l u r i

１．はじめに

板およびシェルの解析は、古くから構造解析における代表的な研究課題であり、さまざまな視点からの研究が行われてきた。特に最近では、有限要素法に代表される数値解析手法の発達に伴い、板・シェルについては非線形解析が行われるのが通常である。構造物の非線形性は、幾何学的非線形性と材料非線形性とに大別され、両者を考慮した複合非線形解析を実施した研究例も少なくない。一方、二つの非線形性のうち幾何学的非線形性に着目すれば、有限変位・微小ひずみの仮定に基づく“有限変位問題”と、ひずみをも含めて有限と見なす“有限変形問題”とに分類される。薄肉の板・シェルの有限変位解析については、従来から多く報告されており、有限変形解析についてもいくつかの研究が見受けられる[1),2)]。これに対し、厚肉シェルの有限変形解析に関する研究は、極めて少ないのが現状である[3)]。

本研究では、文献２）に示された薄肉シェルの有限変形解析の理論を基礎に、横せん断変形の効果を考慮して厚肉シェルの有限変形問題への適用が可能となるように、変分原理の再構成を計った。ここでは、厚肉シェル理論におけるひずみ測度や応力測度の定義、および結果として導かれる変分原理の一例を示すことにする。

２．幾何学的仮定と基底ベクトル

厚肉シェル理論の構築に先立ち、Ｍｉｎｄｌｉｎの厚板理論と同様な幾何学的な仮定を導入する。すなわち、変形前にシェル中央面に垂直であった断面は、変形後もその直線性を保つものの、必ずしも法線性を保持しないとする。また、板厚については変形の前後で変化しうるものとする。この時、変形の前後におけるシェル領域内任意点の位置ベクトル$\mathbf{X}$および$\mathbf{x}$は、埋め込み座標系ξ^i $(i = 1 \sim 3)$を用いてそれぞれ次式のように表すことができる。

$$\mathbf{X}(\xi^i) = \mathbf{X}_0(\xi^\alpha) + \xi^3\mathbf{N}\ , \qquad \mathbf{x}(\xi^i) = \mathbf{x}_0(\xi^\alpha) + \xi^3\mathbf{n} \qquad (1),(2)$$

ここに、$\mathbf{X}_0$および$\mathbf{x}_0$は変形前後におけるシェル中央面S_0およびS上の点の位置ベクトルである。また、$\mathbf{N}$はS_0の単位法線ベクトルであるが、仮定によって$\mathbf{n}$は必ずしもSの法線ではなく、また単位ベクトルである必要もない。式（１）・（２）を座標ξ^iで偏微分することにより、変形前後の基底ベクトル$\mathbf{G}_i$および$\mathbf{g}_i$がそれぞれ次式のように得られる。

$$\mathbf{G}_i = (\mathbf{I} - \xi^3\mathbf{B}).\mathbf{A}_i\ , \qquad \mathbf{g}_i = (\mathbf{I} - \xi^3\mathbf{b}).\mathbf{a}_i \qquad (3),(4)$$

ただし、$\mathbf{I}$は２階の単位テンソル、$\mathbf{B}$はS_0の曲率テンソルであり、$\mathbf{A}_i$および$\mathbf{a}_i$はそれぞれ変形の前後におけるシェル中央面上の基底ベクトルである。また、２階のテンソル$\mathbf{b}$は$\mathbf{n}_{,\alpha} = -\mathbf{b}.\mathbf{a}_\alpha$によって定義される量であり、$\mathbf{n}$が$S$の法線でないことから、厚肉シェルの場合には必ずしもSの曲率テンソルにはならない。

３．ひずみ測度

シェル中央面における変形勾配を$\mathbf{F}_0$とすれば、シェル内部の任意点における変形勾配$\mathbf{F}$は、式（４）を考慮して次式のように書くことができる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i\mathbf{G}^i = (\mathbf{I} - \xi^3\mathbf{b}).\mathbf{F}_0.(\mathbf{A}_i\mathbf{G}^i) \qquad (6)$$

文献２）では薄肉シェルの有限変形問題におけるひずみ測度を定義する際に、Ｇｒｅｅｎ－Ｌａｇｒａｎｇｅのひずみテンソル$\gamma \equiv \dfrac{1}{2}(\mathbf{F}^T.\mathbf{F} - \mathbf{I})$の形に着目した。同様の過程を経れば、厚肉シェルのひずみ測度の定義として、次式を採用することができる。

$$\mathbf{U}_0 - \xi^3\hat{\mathbf{b}}^* \; ; \quad \hat{\mathbf{b}}^* \equiv \mathbf{F}_0^{\,T}.\mathbf{b}^T.\mathbf{R}_0 \qquad (7)$$

ここに、$\mathbf{U}_0$は右ストレッチテンソル、$\mathbf{R}_0$は回転テンソルであり、極分解定理$\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0.\mathbf{U}_0$を考慮した。式（７）において、$\mathbf{U}_0$がシェル中央面の伸びひずみ、$\hat{\mathbf{b}}^*$が曲げひずみにそれぞれ対応している。式（７）の表示そのものは、文献２）の薄肉シェル理論において導入されたものと同一であるが、厚肉シェルの場合には、$\mathbf{b}$がSの曲率テンソルでなく非対称となる点が異なっている。

４．応力測度

前節で定義したひずみ測度$\mathbf{U}_0$および$\hat{\mathbf{b}}^*$とエネルギーの意味で共役な応力測度を、文献２）の手続きに従って誘導する。まず、次の２式で定義される合応力テンソル${}_t\mathbf{n}$，${}_t\mathbf{r}$を導入する。

$${}_t\mathbf{n} \equiv \mathbf{A}_\alpha({}_t\mathbf{n}^\alpha) \; ; \quad {}_t\mathbf{n}^i \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \mu_0 \mathbf{G}^i.\,\mathbf{t}d\xi^3 \qquad (8)$$

$${}_t\mathbf{r} \equiv \mathbf{A}_\alpha({}_t\mathbf{r}^\alpha) \; ; \quad {}_t\mathbf{r}^\alpha \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \mu_0 \xi^3 \mathbf{G}^\alpha.\,\mathbf{t}d\xi^3 \qquad (9)$$

但し、μ_0は曲率テンソル$\mathbf{B}$の成分から計算される量であり、$\mathbf{t}$は第１種Ｐｉｏｌａ－Ｋｉｒｃｈｈｏｆｆの応力テンソルを表している。応力テンソル$\mathbf{t}^T$が変形勾配$\mathbf{F}$と共役であることを考慮し、$\mathbf{t}^T:\mathbf{F}$を板厚方向に積分してみると、

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mu_0 \mathbf{t}^T:\mathbf{F}d\xi^3 = {}_r\mathbf{n}^*:\mathbf{U}_0 - {}_{r^*}\mathbf{r}:\hat{\mathbf{b}}^* \qquad (10)$$

ここに、${}_r\mathbf{n}^*$および${}_{r^*}\mathbf{r}$はそれぞれ次式で定義される合応力テンソルである。

$${}_r\mathbf{n}^* \equiv \frac{1}{2}({}_t\mathbf{n}.\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0^{\,T}.{}_t\mathbf{n}^T) + \underline{\underline{\frac{1}{2}\{(\mathbf{N}{}_t\mathbf{n}^3).\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0^{\,T}.({}_t\mathbf{n}^3\mathbf{N})\}}} \; , \quad {}_{r^*}\mathbf{r} \equiv {}_t\mathbf{r}.\mathbf{R}_0 \qquad (11),(12)$$

なお、下線部の項は、薄肉シェルの場合には存在しない。式（１０）から明らかなように、厚肉シェルの有限変形問題においては、ひずみ測度$\mathbf{U}_0$および$\hat{\mathbf{b}}^*$と共役な応力測度は、それぞれ${}_r\mathbf{n}^*$および${}_{r^*}\mathbf{r}$となる。

５．混合型変分原理

文献２）では、回転自由度を考慮した、３次元等方弾性体に対するＨｕ－Ｗａｓｈｉｚｕ型の変分原理から出発し、Ｌａｇｒａｎｇｅの接触変換を通じ比較的簡明な形の混合型変分原理を誘導している。同様な手続きを経て厚肉シェルに対する混合型の変分原理の１つとして、次式を得ることができる。

$$\widetilde{F}_2(\mathbf{R}_0, \mathbf{n}, {}_t\mathbf{n}^\alpha, {}_t\mathbf{r}^\alpha) = \int_{S_0} \{-\widetilde{W}_{cs}({}_r\mathbf{n}^*) + \widetilde{W}_{0b}(\hat{\mathbf{b}}^*) + {}_t\mathbf{n}^\alpha.\mathbf{A}_\alpha - \underline{\underline{{}_t\mathbf{r}^\alpha.\mathbf{n}_{,\alpha}}}\}\sqrt{A}d\xi^1 d\xi^2$$
$$+ \int_{C_{\sigma 0}} (\nu_{0\alpha}\,{}_t\mathbf{r}^\alpha - {}_t\overline{\mathbf{R}}).\mathbf{n}\sqrt{A}ds + \int_{C_{u0}} \nu_{0\alpha}({}_t\mathbf{n}^\alpha.\overline{\mathbf{u}}_0 + {}_t\mathbf{r}^\alpha.\overline{\mathbf{n}})\sqrt{A}ds \qquad (13)$$

ここに、$\widetilde{W}_{cs}$は面内の伸縮に関する補ひずみエネルギー密度を、$\widetilde{W}_{0b}$は曲げに関するひずみエネルギー密度をそれぞれ表している。シェル中央面の境界$C_{\sigma 0}$およびC_{u0}は、力学的境界条件および幾何学的境界条件がそれぞれ与えられる境界であり、$\nu_{0\alpha}$は境界の単位法線ベクトルの成分、$\overline{(\;)}$は境界上で与えられる諸量を示している。

式（１３）で示された混合型変分原理は、未知量として右ストレッチテンソル$\mathbf{U}_0$を含んでいないのが特徴であり、文献２）で導かれた薄肉シェルの有限変形問題に対する変分原理と類似の形を有している。しかしながら、下線部の項は薄肉シェル理論においては存在せず、面内の伸縮に関するひずみエネルギー密度や補ひずみエネルギー密度に関しては、Ｍｉｎｄｌｉｎの厚板理論に倣った補正係数を導入し修正を施してある。ひずみエネルギー密度の修正や他の変分原理の誘導の詳細については、講演会当日に説明するつもりである。

参考文献

1) Pietraszkiewicz, W., Int. Jour. Non-linear Mech. 19, pp.115~140, 1984.

2) Atluri, S. N., Compt. Struct. 18, pp.93~116, 1984.

3) Sansour, C. and Bufler, H., Int. Jour. Numer. Meth. Engng. 34, pp.73~115, 1992.