

I-83

骨組部材の弾塑性有限変位解析における応力評価

新瀉県 正会員 中林隆宏
 長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治
 長岡技術科学大学 正会員 林 正

1. まえがき

骨組構造の弾塑性解析には、断面力と変形量の関係式に材料非線形の影響を含めて、部材内の降伏を見かけ上、その点の断面全体が降伏したものと扱う方法と、断面内の塑性域の進展を考慮できるように、断面内の点の応力とひずみの関係式に材料非線形の影響を含めた方法に大別できるものと思われる。後者の方法は、前者の方法に比べて塑性域の進展を正確に表現できるが、断面内の種々の点で降伏判定を行えるように、種々の点での応力やひずみなどの諸量を保持するために多くの記憶容量を必要とし、また計算時間も前者の方法に比べて多く必要になる。そこで、本報告では、後者の方法で、簡便に弾塑性計算を行えるような方法について考察し、要素内の細要素分割数を変えたときの収束性と解の精度について調べる。なお、本報告では、平面骨組構造を対象にする。

2. 弾塑性有限変位解析の定式化

非線形解析の定式化には、増分ステップの進行と共に部材座標系を逐次更新する更新ラグランジュ法を用いる。この方法では、初め直線であった部材が、増分ステップの進行と共に曲線になる。このため、本来、曲線要素を用いるべきであるが、定式化が煩雑になるので、各増分ステップでの節点位置を結んだ直線を要素の軸とする2節点直線要素により扱うものとする。

直線要素内の変位増分 Δu_1 を両節点の変位から1次式で表し、 Δu_3 を両節点の変位とその微係数から3次式で表す。また、部材の伸び率増分 $\Delta \varepsilon_0$ と曲率増分 $\Delta \kappa_2$ を次のように表す¹⁾。

$$\Delta \varepsilon_0 \equiv \Delta u_{1,1} + \frac{1}{2}(\Delta u_{3,1})^2 \equiv \frac{1}{\ell}(\mathbf{h}_0 + \frac{1}{2\ell}\mathbf{H}_0\Delta\mathbf{d})^T\Delta\mathbf{d} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Delta \kappa_2 \equiv -[(1 - \Delta u_{1,1})\Delta u_{3,1}]_{,1} \equiv \frac{1}{\ell^2}(\mathbf{h}_2 + \frac{1}{2\ell}\mathbf{H}_2\Delta\mathbf{d})^T\Delta\mathbf{d}$$

上式中の $\Delta\mathbf{d}$ は節点変位ベクトル、 $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_2$ は座標 x_1 の関数からなるベクトル、 $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_2$ は座標 x_1 の関数からなる行列である。なお、本文では任意な関数 $f(x_1)$ の x_1 に関する導関数を $f_{,1}$ と表すことにする。

上式の伸び率増分 $\Delta \varepsilon_0$ と曲率増分 $\Delta \kappa_2$ から、ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_1$ は、 $\Delta \varepsilon_0 + x_3 \Delta \kappa_2$ で与えられ、応力増分 $\Delta \sigma_1$ は、ひずみ増分から、 $D(\sigma_1)\Delta \varepsilon_1$ で与えられる。なお、 $D(\sigma_1)$ は、弾性域では、弾性係数 E になり、塑性域では、ひずみ硬化係数 H と弾性係数から、 $EH/(E+H)$ で与えられるものとする。

これより、軸力増分 ΔN と曲げモーメント増分 ΔM は、

$$\Delta N \equiv \int_A \Delta \sigma_1 dA = D_0 \Delta \varepsilon_0 + D_1 \Delta \kappa_2, \quad \Delta M \equiv \int_A \Delta \sigma_1 x_3 dA = D_1 \Delta \varepsilon_0 + D_2 \Delta \kappa_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表される。ここに、 D_0, D_1, D_2 は、次式で与えられる。

$$D_0 \equiv \int_A D(\sigma_1) dA, \quad D_1 \equiv \int_A D(\sigma_1) x_3 dA, \quad D_2 \equiv \int_A D(\sigma_1) x_3^2 dA \quad \dots\dots\dots (3)$$

これらをエネルギー原理に適用すると、次の要素剛性方程式が得られる。

$$(\mathbf{k}_L + \mathbf{k}_G)\Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{f} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_G, \mathbf{f}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_L &= \int_0^\ell \left\{ \frac{D_0}{\ell} \mathbf{h}_0 \mathbf{h}_0^T + \frac{D_1}{\ell^2} (\mathbf{h}_0 \mathbf{h}_2^T + \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_0^T) + \frac{D_2}{\ell^3} \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_2^T \right\} \frac{dx_1}{\ell} \\ \mathbf{k}_G &= \int_0^\ell \left(\frac{N}{\ell} \mathbf{H}_0 + \frac{M}{\ell^2} \mathbf{H}_2 \right) \frac{dx_1}{\ell}, \quad \mathbf{f} = \int_0^\ell \left(N \mathbf{h}_0 + \frac{M}{\ell} \mathbf{h}_2 \right) \frac{dx_1}{\ell} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式を計算するには、その増分ステップの要素内に生じている応力 σ_1 と断面力 N, M が明らかになっている必要があり、これらは各増分ステップでの値の総和から求められる。いま、 σ_1, N と M の座標 x_1 に関する関数形を調べる。ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_1$ の節点変位増分に関する線形項は、1次式、非線形項は4次式で表される。また、 $D(\sigma_1)$ は弾性域と塑性域で不連続に変化するので、これらから求められる応力を x_1 のべき級数で表すと、かなり高次の多項式になる。ところで、直線部材の平衡方程式は、次のように表される。

$$(F_1 + \Delta F_1)_{,1} + \kappa_2(F_3 + \Delta F_3) = 0, \quad (F_3 + \Delta F_3)_{,1} - \kappa_2(F_1 + \Delta F_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 κ_2 は、その増分ステップでの部材の曲率であり、 $(F_1 + \Delta F_1)$ と $(F_3 + \Delta F_3)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_1 + \Delta F_1 &= (N + \Delta N) \cos \Delta \theta_2 + \frac{(M + \Delta M)_{,1}}{1 + \epsilon_0 + \Delta \epsilon_0} \sin \Delta \theta_2 \quad \dots\dots\dots (7) \\ F_3 + \Delta F_3 &= -(N + \Delta N) \sin \Delta \theta_2 + \frac{(M + \Delta M)_{,1}}{1 + \epsilon_0 + \Delta \epsilon_0} \cos \Delta \theta_2 \end{aligned}$$

これより、増分ステップの幅を小さくとり、部材の伸び率が小さい場合には、 $(F_1 + \Delta F_1) \div (N + \Delta N)$ 、 $(F_3 + \Delta F_3) \div (M + \Delta M)_{,1}$ と見なすことができ、また、直線要素では、 $\kappa_2 = 0$ であることより、分布荷重が無い場合には、要素の材料特性の変化に関係なく、軸力 $N + \Delta N$ は、 x_1 に関して 1 次式、曲げモーメント $M + \Delta M$ は、2 次式で表さる。これより、増分ステップの幅や伸び率があまり小さくない場合でも、 x_1 に関する高次の項が要素の挙動に及ぼす影響は、低次の項に比べて小さいものと考えられる。そこで、軸力増分 $\Delta \bar{N}$ と曲げモーメント増分 $\Delta \bar{M}$ を、式 (2) から求めた両節点の断面力から次のように表す。

$$\Delta \bar{N} \equiv \frac{1}{2}(\Delta N_a + \Delta N_b), \quad \Delta \bar{M} \equiv (1 - \frac{x_1}{\ell})\Delta M_a + \frac{x_1}{\ell}\Delta M_b \quad \dots\dots\dots (8)$$

上式の各増分ステップでの値の総和 $\bar{N}$ 、 $\bar{M}$ を式 (5) の N と M に用いる。

また、上式から求めた $\Delta \bar{N}$ と $\Delta \bar{M}$ を、式 (2) に代入して伸び率増分 $\Delta \bar{\epsilon}_0$ と曲率増分 $\Delta \bar{\kappa}_2$ を解き、応力増分 $\Delta \bar{\sigma}_1$ を $D(\bar{\sigma}_1)$ と $\Delta \bar{\epsilon}_0 + x_3 \Delta \bar{\kappa}_2$ の積として求める。この D に含まれる応力は一つ前の増分段階までの応力を表しているの、最初の増分ステップからこれらの計算を、順番に行うことにより、ある増分ステップでの応力 $\bar{\sigma}_1$ と断面力 $\bar{N}$ 、 $\bar{M}$ は求められる。

これらより、式 (5) の k_G と f に含まれる積分は解析的に求められる。しかし、 k_L に含まれる積分は、数値積分により求めることになる。式 (3) の積分と k_L の積分を行うために、断面内の x_3 方向と要素の軸 x_1 方向に細要素分割を行い、これらの細要素の中央での応力で、この細要素の塑性状態を判定し、これらの細要素の剛性の総和を k_L とする。

3. 計算例と考察

上記の方法で、弾塑性解析を行うには、剛性を正確に評価するために、細要素を細かくする必要があるが、あまり細かくすると記憶容量や計算時間の増加につながる。そこで、図 1 に示しているような下端支持された柱の弾塑性有限変位解析を、細要素の分割数を変えて行い、解の収束性を調べる。なお、ヤング係数を $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、硬化係数とヤング係数の比を $H/E=0.025$ 、降伏応力を $\sigma_Y=2800 \text{ kgf/cm}^2$ とする。また、座屈荷重 P_{cr} と降伏するときの荷重 $\sigma_Y A$ が等しくなるように、柱の長さを $L=151.511 \text{ cm}$ とする。図 2 に、要素分割数を 10、一つの要素内の細分割数は、断面内で 5, 10, 20 分割、軸方向に 1 と 2 分割としたときの結果を示す。下図は軸方向に 1 分割、断面内の分割数を 5, 10 と 20 と変えたときの荷重変位曲線を示している。上図は、断面内の分割を 10 にして、軸方向の分割数を 1 と 2 に変えたときの各増分ステップでの不平衡力が、許容量以下になるまでの反復回数を示している。これより、軸方向に細要素分割すると、収束性が悪化することが分かる。これは、細要素分割を行わなければ、1 次式と 3 次式で表した Δu_1 と Δu_3 が、平衡方程式の線形解に一致するのに反して、細要素分割を行い、軸方向の剛性変化を考慮すると、平衡方程式の線形解に一致しないようになるために、誤差が増え収束性が悪化したものと考えられる。

参考文献

- 1) 岩崎英治・林 正：立体骨組構造の有限変位解析の精密化，構造工学論文集，Vol.37A，pp353-366，1991。

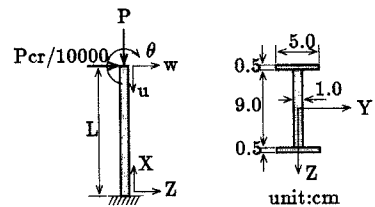


図 1 柱の弾塑性有限変位解析

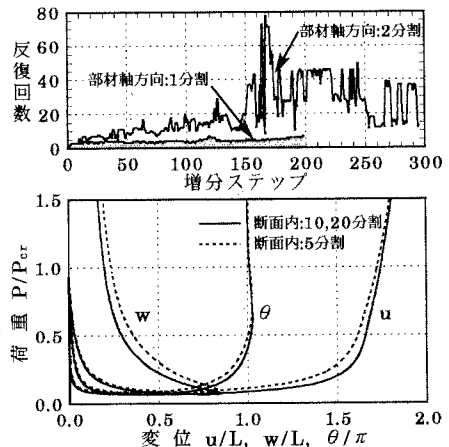


図-2 荷重変位曲線