

I-79 構造解析におけるハイブリッド法の応用

岩手大学工学部 学生員 ○段 梅 正員 宮本 裕
正 員 岩崎 正二 出戸 秀明

1. まえがき 有限要素法は、構造解析の分野から始まり発展をとげた後いろいろな領域に応用されている。1964年にハイブリッド法が誕生してから、新数値解析手法が提案されている。この方法は、有限要素法のいくつか解きにくい問題を解決するために開発された。板と殻問題の分野において有用な応用がなされている。骨組構造解析においては、応力と変位の関数を別々に選べる利点があるので、この論文でいくつかの問題を取り上げ説明する。理論と計算結果より、ハイブリッド法はマトリックス有限要素法と似ているところがあり、いくつかの問題をよく解決することができる。

2. ハイブリッド型の変分原理とハイブリッド法の剛性方程式の誘導

最小コンプリメンタリエネルギーの原理より汎関数は次のようになる。

$$\Pi_c = \sum_n \left\{ \int_{V_n} \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV - \int_{S_{un}} u^T T ds \right\}$$

もし $\sigma = P \beta$ $P|_{\partial V_n} = T$ $\bar{u} = u|_{S_{un}} = Lq$ とおくと上式は、

$$\Pi(\beta, q) = \beta^T \left(\int_{V_n} P^T S P dV \right) \beta - q^T \left(\int_{S_{un}} L^T T ds \right) \beta$$

$\delta \Pi = 0$ から次式が得られる。 $\left(\int_{V_n} P^T S P dV \right) \beta - \left(\int_{S_{un}} L^T T ds \right)^T q = 0$, $\left(\int_{S_{un}} L^T T ds \right) \beta = Q$

ここで、Qは等価節点力である。従って、次のような式を求めることができる。

$$H\beta - Gq = 0, \quad G^T \beta = Q, \quad \text{ここで,} \quad \int_{V_n} P^T S P dV = H, \quad \left(\int_{S_{un}} L^T T ds \right)^T = G$$

上式より $K^{(e)} q = Q$ ここで、 $K^{(e)} = G^T H^{-1} G$, $\beta = H^{-1} G q$

次ぎには図-1に示すような平面骨組構造について要素剛性マトリックスを求める。

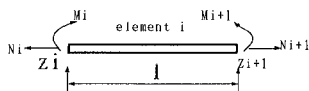


図-1

$$R^T = [N_i \ Z_i \ M_i \ N_{i+1} \ Z_{i+1} \ M_{i+1}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = [u_i \ w_i \ \theta_i \ u_{i+1} \ w_{i+1} \ \theta_{i+1}] \quad L = E \quad P = \begin{bmatrix} \frac{y}{J} & \frac{y}{J} x & \frac{1}{A} \end{bmatrix}$$

したがって、ハイブリッド法では下式に示すような変位型有限要素法と同じような要素剛性マトリックスになる。

3. 計算例 計算例1 図-2に示す連続梁において、図に示すような節点番号と要素番号を与える。

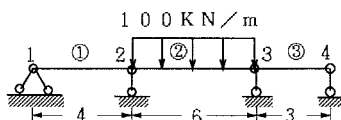


図-2 連続梁

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{l_1} = 2.0 \times 10^6 \text{ KN/cm} \quad \frac{EI}{l_2} = 1.0 \times 10^6 \text{ KN/cm} \quad \frac{EI}{l_3} = 3.0 \times 10^6 \text{ KN/cm}$$

$$q = \{0 \ -1.78 \ 0 \ 3.57 \ 0 \ -2.86 \ 0 \ 1.43\}$$

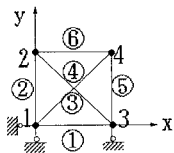
表1 それぞれの要素及び節点におけるモーメント

要素番号	β の値	要素のモーメント	節点のモーメント
①	$\beta_1=0$ $\beta_2=214$	$M=-214x$	$M_{(1)1}=0$ $M_{(2)2}=214$
②	$\beta_1=-85.8$ $\beta_2=7.1$	$M=-85.8+7.1x$	$M_{(2)1}=-85.8$ $M_{(3)2}=42.9$
③	$\beta_1=257$ $\beta_2=-85.7$	$M=257-85.667x$	$M_{(3)1}=257$ $M_{(4)2}=0$



図-3 モーメントの分布

計算例2 図-4に示すトラスにおいて、それぞれの節点応力を計算する。



$$E=2 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$$

$$A=60 \text{ cm}^2$$

$$l=12 \text{ m}$$

$$u=[u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T=[0 \ 0 \ 24.2 \ 5.0 \ 5.0 \ 0 \ 19.2 \ -5.0]^T$$

次のような節点応力が容易に求められる。

$$\sigma=[\sigma_{1x} \ \sigma_{1y} \ \sigma_{2x} \ \sigma_{2y} \ \sigma_{3x} \ \sigma_{3y} \ \sigma_{4x} \ \sigma_{4y}]^T=[-5.0, \ 0, \ 5.0, \ 0, \ 5.0, \ 0, \ -5.0, \ 0]^T$$

図-4 トラス

計算例3

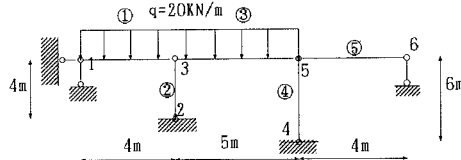


図-5 ラーメン

節点の変位

$$q^{(1)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.15 \end{bmatrix} \quad q^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.15 \end{bmatrix} \quad q^{(3)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1.15 \\ 0 \\ -4.89 \end{bmatrix} \quad q^{(4)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4.89 \end{bmatrix} \quad q^{(5)}=\begin{bmatrix} 0 \\ -4.89 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

表2 それぞれの要素及び節点におけるモーメント

要素番号	β の値	要素のモーメント	節点のモーメント
①	$\beta_1=-2.3$ $\beta_2=1.725$	$M=-2.3+1.725X$	$M_{(1)1}=-2.3$ $M_{(2)2}=4.6$
②	$\beta_1=-2.3$ $\beta_2=1.725$	$M=-2.3+1.725X$	$M_{(2)1}=-2.3$ $M_{(3)2}=4.6$
③	$\beta_1=5.18$ $\beta_2=-4.488$	$M=5.18-4.488X$	$M_{(3)1}=5.18$ $M_{(4)2}=-17.26$
④	$\beta_1=9.78$ $\beta_2=-4.89$	$M=9.78-4.89X$	$M_{(4)1}=9.78$ $M_{(5)2}=-19.56$
⑤	$\beta_1=19.56$ $\beta_2=-7.335$	$M=19.56-7.335X$	$M_{(5)1}=19.56$ $M_{(6)2}=-9.78$

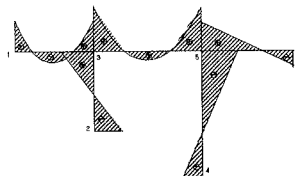


図-6 モーメントの分布

4. 結論 ハイブリッド法で構造解析を行うと、簡単な問題については計算結果がマトリックス有限要素法と同じになる、しかし複雑な問題については、精度のよい解を得る。ハイブリッド法は要素条件が満足しやすいので、構造解析について非常に有用であり、広い応用範囲がある。