

# I-77 エネルギー原理に基づくトラス構造物の弾塑性履歴挙動解析法の能率性に関する研究

愛媛大学大学院 学 青 野 将 也 愛媛大学工学部 正 大久保 禎二  
字部興産(株) 正 和多田 康男

## 1. まえがき

本稿は、著者らがこれまでに研究を行ってきた最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく固定荷重を受けるトラス構造物の弾塑性解析法<sup>1)~4)</sup>を、変動荷重を受ける場合の弾塑性履歴挙動の解析問題をも解けるように拡張するとともに<sup>5)</sup>バイリニアールおよび曲線的な応力度-ひずみ関係を有する材料よりなるトラス構造物の解析例について、上記の解析法および変位法による結果の比較を行い、エネルギー原理に基づく解析法の能率性について検討した結果について述べるものである。

## 2. エネルギー原理に関する一仮定

まず、エネルギー原理に基づき変動荷重による構造物の挙動の解析法を確立するに先立ち、エネルギー原理に関して次の仮定を設ける。すなわち、通常最小コンプリメンタリーエネルギーの原理における部材  $i$  の断面のコンプリメンタリーエネルギー密度  $\beta_i$  は、応力度およびひずみが図-1に示す  $\sigma_{pi}$  および  $\varepsilon_{pi}$  の場合は  $OAB$  の面積、また  $\sigma_{pi} + \bar{\sigma}_i$  および  $\varepsilon_{pi} + \bar{\varepsilon}_i$  の場合は  $OCD$  の面積で定義されている。本研究では、「トラス構造物がすでに先行荷重  $P$  により先行応力度  $\sigma_{pi}$  および先行ひずみ  $\varepsilon_{pi}$  を受けている場合、新たに載荷される増分荷重  $\bar{P}$  に対して点  $B$  を原点  $\bar{O}$  として図-1に示す  $BED$  をコンプリメンタリーエネルギー密度  $\beta_i$ 、また減少荷重  $-\bar{P}$  に対しては図-2に示す点  $B$  を原点  $\bar{O}$  とし、同じく  $BED$  をコンプリメンタリーエネルギー密度  $\beta_i$  として考慮しても変動荷重  $\bar{P}$  に対して最小コンプリメンタリーエネルギーの原理が成り立つ」と仮定した。

## 3. 増分あるいは減少荷重 $\bar{P}$ による軸力の変化量 $\bar{N}$ の解析法

2. で述べた仮定および文献1)で著者等の提案している材料の非線形性を考慮したトラス構造物の解析法を用いて、変動荷重  $\bar{P}$  によるトラス構造物の各部材の軸力の変化量  $\bar{N}$  を次のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解くことにより決定する。すなわち、

$$\text{find } \bar{N}, \text{ which minimize } \bar{\Pi}_C(\bar{N}) = \sum_{i=1}^n \bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_i) \quad (1)$$

$$\text{subject to } g(\bar{N}) = \bar{P} + C\bar{N} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\bar{P} = [\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\ell]^T$ ,  $g(\bar{N}) = [g_1(\bar{N}), \dots, g_m(\bar{N})]^T$ : 各可動節点における力の釣合方程式,  $C$ : 各部材軸力  $\bar{N}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) の各可動節点変位成分への変換マトリックス,  $n$ : 部材数,  $m$ : 自由度の数,  $\ell$ : 変動荷重の数である。式(1)の  $\bar{\Pi}_{Ci}$  は、2. で設定した仮定により、増分荷重の場合は図-1、減少荷重の場合は図-2を参照して次式により計算される。

$$\bar{\beta}_i = \int_{\sigma_{pi}}^{\sigma_{pi} + \bar{\sigma}_i} [\varepsilon_i(\sigma) - \varepsilon_i(\sigma_{pi})] d\sigma \quad (3)$$

$$\bar{\Pi}_{Ci}(\bar{N}_i) = \int_{V_i} \bar{\beta}_i dV = \bar{\beta}_i A_i \ell_i \quad (4)$$

ここに、 $V_i$ ,  $A_i$ ,  $\ell_i$  はそれぞれ部材  $i$  の体積、断面積および部材長である。

上記の式(1)~(4)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を、文献1)

で述べている逐次二次計画法および線形計画法とを組み合わせた最適化手法を用いて解く。

## 4. 解析例および検討

上記の解析法の信頼性および能率性を検討するため、図-3(a), (b)に示す2種類の応力度-ひずみの履歴挙動を示す非線形材料を有する図-4の2径間連続31部材トラスが、表-1, 2に示す荷重①(下向きに  $P_1=600\text{tf}$ ,  $P_2=150\text{tf}$ ), 荷重②(上向きに  $P_1=600\text{tf}$ ,  $P_2=150\text{tf}$ ), 荷重③(上向きに  $P_1=600\text{tf}$ ,  $P_2=150\text{tf}$ ), 荷重④(下

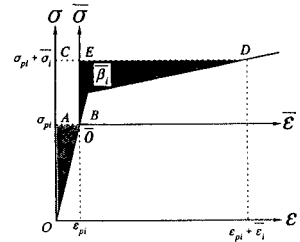


図-1 増分荷重に対するコンプリメンタリーエネルギー密度

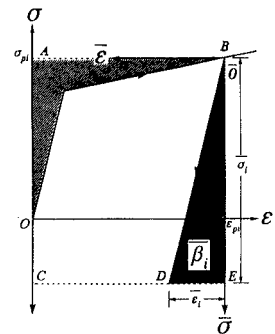


図-2 減少荷重に対するコンプリメンタリーエネルギー密度

向きに $P_1=1400\text{tf}$ ,  $P_2=350\text{tf}$ の増分荷重および減少荷重の荷重履歴を受ける場合について上記の方法で解析を行い、変位法による解析結果との比較を行った。

図-3 (a)および(b)の材料を用いた場合の解析結果をそれぞれ表-1および2に、各変動荷重による部材14の応力度-ひずみ関係の履歴を図-5および6に示す。図-5, 6において( )の中の最初の数字はひずみ(%)を、次の数字は応力度( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )を示す。表-1, 2より明らかのように、3.で述べた解析法および変位法により求めた各部材の応力度およびひずみの相対誤差は0.0~0.8%であり完全に同一の解を得ている。一方、荷重①, ②, ③, ④の各荷重に対する解析時間を比較すると、材料(a)の荷重②のように全ての部材の応力度の変化量 $\bar{\sigma}$ が $\sigma-\epsilon$ 履歴関係の一つの直線内に収まる場合以外は、3.で述べた解析法が変位法に比べて材料(a)の場合は1/3.5~1/4.5程度であるが、材料(b)のように $\sigma-\epsilon$ 関係が曲線を有する場合には1/56~1/180程度と非常に少ない計算時間で解を得ることができる。このように、材料の $\sigma-\epsilon$ 関係が曲線部や折れ線の箇所が多い複雑な関係式で表わされるに従い、エネルギー原理に基づく解析法により変位法と比較して極めて能率的に解析できることが明らかとなった。

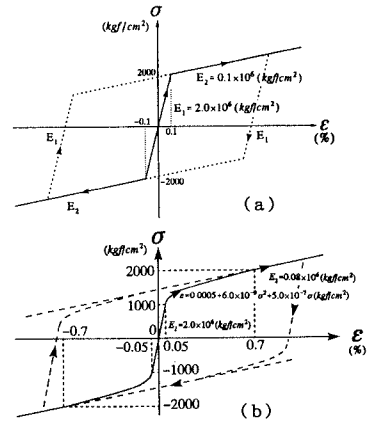


図-3 材料の応力度-ひずみ履歴挙動

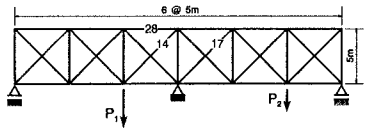


図-4 2径間連続3部材トラス

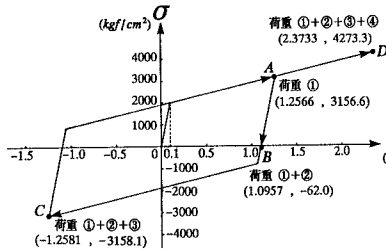


図-5 部材14の応力度-ひずみ履歴(材料(a))

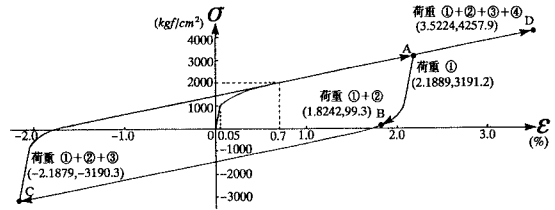


図-6 部材14の応力度-ひずみ履歴(材料(b))

表-1 本研究の方法および変位法による結果の比較(材料(a))

| 荷重<br>(tf)                      | 解析法                    | CPU TIME <sup>1)</sup><br>(秒) | 部材14 部材17 部材28                              |         |         |
|---------------------------------|------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------|---------|---------|
|                                 |                        |                               | 応力度 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )<br>ひずみ (%) |         |         |
| 荷重①<br>$P_1=600$<br>$P_2=150$   | 本論文の方法                 | 0.4                           | 3156.6                                      | -1287.2 | -1351.2 |
|                                 | 変位法                    | 1.4                           | 1.2566                                      | -0.0644 | -0.0676 |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 0.0000                                      | 0.1321  | 0.0296  |
|                                 |                        |                               | 0.0000                                      | 0.0000  | 0.0000  |
| 荷重②<br>$P_1=-600$<br>$P_2=-150$ | 本論文の方法                 | 0.4                           | -62.0                                       | -154.0  | -591.9  |
|                                 | 変位法                    | 0.2                           | 1.0957                                      | -0.0077 | -0.0296 |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | -62.4                                       | -155.7  | -592.3  |
|                                 |                        |                               | 1.0956                                      | -0.0077 | -0.0296 |
| 荷重③<br>$P_1=600$<br>$P_2=-150$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | -3158.1                                     | 1287.1  | 1352.3  |
|                                 | 変位法                    | 1.4                           | -1.2581                                     | 0.0644  | 0.0676  |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | -3156.3                                     | 1288.4  | 1350.7  |
|                                 |                        |                               | -1.2564                                     | 0.0645  | 0.0676  |
| 荷重④<br>$P_1=1400$<br>$P_2=350$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | 0.0570                                      | 0.1010  | 0.1183  |
|                                 | 変位法                    | 1.8                           | 0.1353                                      | 0.0155  | 0.0000  |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 4273.3                                      | -2150.7 | -1762.0 |
|                                 |                        |                               | 2.3733                                      | -0.2506 | -0.0866 |
| 荷重⑤<br>$P_1=1400$<br>$P_2=350$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | 4271.6                                      | -2148.9 | -1733.2 |
|                                 | 変位法                    | 1.8                           | 2.3716                                      | -0.2489 | -0.0866 |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 0.0398                                      | 0.0837  | 0.0693  |
|                                 |                        |                               | 0.0717                                      | 0.6830  | 0.0000  |

1) CPU TIME は DEC3000/300 による計算時間を表す。

2) 本論文の方法および変位法による相対誤差の絶対値

3) 荷重の方向は下向きを正、上向きを負として表示している。

表-2 本研究の方法および変位法による結果の比較(材料(b))

| 荷重<br>(tf)                      | 解析法                    | CPU TIME <sup>1)</sup><br>(秒) | 部材14 部材17 部材28                              |         |         |
|---------------------------------|------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------|---------|---------|
|                                 |                        |                               | 応力度 ( $\text{kgf}/\text{cm}^2$ )<br>ひずみ (%) |         |         |
| 荷重①<br>$P_1=600$<br>$P_2=150$   | 本論文の方法                 | 0.4                           | 3191.2                                      | -1545.8 | -1300.4 |
|                                 | 変位法                    | 41.0                          | 2.1889                                      | -0.2560 | -0.1192 |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 3190.8                                      | -1547.3 | -1301.1 |
|                                 |                        |                               | 2.1885                                      | -0.2571 | -0.1195 |
| 荷重②<br>$P_1=-600$<br>$P_2=-150$ | 本論文の方法                 | 0.4                           | 0.0125                                      | 0.0989  | 0.0538  |
|                                 | 変位法                    | 23.2                          | 0.0182                                      | 0.4278  | 0.2510  |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 99.3                                        | -544.7  | -175.9  |
|                                 |                        |                               | 1.8242                                      | -0.2060 | -0.0629 |
| 荷重③<br>$P_1=600$<br>$P_2=-150$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | 98.5                                        | -540.6  | -174.6  |
|                                 | 変位法                    | 22.7                          | 1.8234                                      | -0.2068 | -0.0632 |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 0.8122                                      | 0.7584  | 0.7446  |
|                                 |                        |                               | 0.0439                                      | 0.3868  | 0.4747  |
| 荷重④<br>$P_1=1400$<br>$P_2=350$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | -3190.3                                     | 1495.0  | 1273.7  |
|                                 | 変位法                    | 71.8                          | -2.1879                                     | 0.1448  | 0.0705  |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | -3190.7                                     | 1496.5  | 1274.3  |
|                                 |                        |                               | 0.0125                                      | 0.1002  | 0.0471  |
| 荷重⑤<br>$P_1=1400$<br>$P_2=350$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | 0.0228                                      | 0.6177  | 0.1416  |
|                                 | 変位法                    | 71.8                          | 4257.9                                      | -2023.6 | -1655.9 |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 3.5224                                      | -0.7295 | -0.3386 |
|                                 |                        |                               | 4256.5                                      | -2025.8 | -1655.0 |
| 荷重⑥<br>$P_1=1400$<br>$P_2=350$  | 本論文の方法                 | 0.4                           | 3.5206                                      | -0.7322 | -0.3378 |
|                                 | 変位法                    | 71.8                          | 0.0329                                      | 0.1086  | 0.0544  |
|                                 | 相対誤差 <sup>2)</sup> (%) |                               | 0.0511                                      | 0.3688  | 0.2368  |
|                                 |                        |                               | 0.0511                                      | 0.3688  | 0.2368  |

1) CPU TIME は DEC3000/300 による計算時間を表す。

2) 本論文の方法および変位法による相対誤差の絶対値

3) 荷重の方向は下向きを正、上向きを負として表示している。

- [参考文献] 1)大久保 他, 土・学・論, 第374号 2)Ohkubo, S. et al., Computers&structures, Vol. 27, No. 1  
3)大久保 他, 土・学・論, 第398号 4)大久保 他, 土・学・論, 第416号 5)大久保 他, 第45回年譜