I －72

形状マトリックスによる幾何剛性マトリックスの一般化

熊本大学工学部　○学生員　橋本　淳也
同　　上　　正　員　三池　亮次
大分県立佐伯鶴岡高等学校　正　員　佐藤　啓治
熊本大学工学部　正　員　小林　一郎

1.はじめに

筆者らは先に、有限変位仮想仕事の原理に従って接続マトリックス$\mathbf{C}$と平衡マトリックス$\mathbf{H}$という、骨組構造の形状を表すマトリックスを用い、大変形骨組構造解析の基礎式を誘導した。接続マトリックス$\mathbf{C}$は骨組構造の節点に作用する外力ベクトル$\mathbf{p}$と、部材の終端応力ベクトル$\mathbf{p}_m$の関係を規定する、骨組構造の全体の形状によって決まるマトリックスであり、平衡マトリックス$\mathbf{H}$は、部材の両端応力の関係を規定する一つの部材の形状に係わるマトリックスである。幾何剛性マトリックス$\mathbf{K}_G$は、上記の大変形基礎式を変位$\mathbf{d}$で微分することによって誘導されるが、結局、$\mathbf{K}_G$が、全体の骨組形状を表わす$\mathbf{C}$の変位による微分したものと、骨組構造部材の形状に係わる部材平衡マトリックス$\mathbf{H}$の変位による微分値の関数の和で一般化されることを示す。

2、大変形骨組構造解析の基礎式

図１のような、平面骨組構造のI部材の変形の中間状態と変形後における移動直交座標系$(\tilde{\xi}',\tilde{\eta}')$と$(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$を考える。中間状態において、部材始端$i'$から部材軸に沿って$\xi$の距離の部材断面力ベクトルを$\mathbf{p}'_{m\xi}$とすると$(P'j')$部材に関してつり合い式は、

$$\mathbf{p}'_{m\xi}+\mathbf{H}'_{\xi j}\mathbf{p}'_{mj}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

であり、部材$(P'j')$の始端としてのP'における断面力は$-\mathbf{p}'_{m\xi}$である。同様に、変形後において

$$\mathbf{p}_{m\xi}+\mathbf{H}_{\xi j}\mathbf{p}_{mj}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

$\mathbf{H}'_{\xi j}$、$\mathbf{H}_{\xi j}$はそれぞれ変形の中間状態と変形後における部材平衡マトリックスであり、$(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$座標軸方向に成分をもつ部材端力を$\widetilde{\mathbf{p}_{m\xi}},\widetilde{\mathbf{p}_{mj}}$、つり合い式を

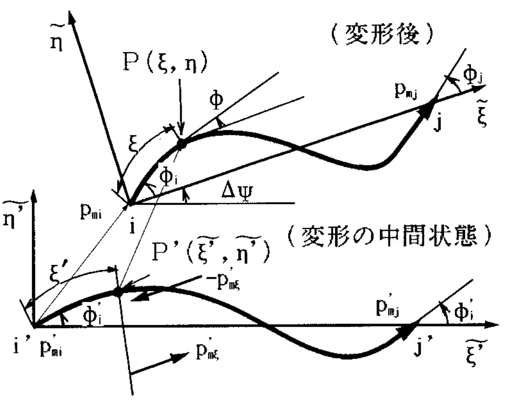

図１　骨組構造の第Ｉ部材の変形

$$\widetilde{\mathbf{p}_{m\xi}}+\widetilde{\mathbf{H}_{\xi j}}\widetilde{\mathbf{p}_{mj}}=\mathbf{0} \qquad (3)$$

と表せば、上式の$(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$座標系における平衡マトリックス$\widetilde{\mathbf{H}_{\xi j}}$は、

$$\widetilde{\mathbf{H}_{\xi j}}=\begin{bmatrix} -1 & & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & \\ -\tilde{\eta} & \tilde{\xi}-\tilde{\xi}_j & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

(2)式の$\mathbf{H}_{\xi j}$は

$$\mathbf{H}_{\xi j}=\widetilde{\mathbf{L}_{\xi}^{T}}\widetilde{\mathbf{H}_{\xi j}}\widetilde{\mathbf{L}_j} \qquad (5)$$

である。$\widetilde{\mathbf{L}_{\xi}}$は、$(Pj)$部材の$P$端における部材軸方向の$(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$座標系に対する座標変換マトリックスである。いま、中間状態において部材が直線である場合には、変形後のP点における部材廻転角をϕとすると

$$\widetilde{\mathbf{L}_{\xi}}=\begin{bmatrix} 1 & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \widetilde{\mathbf{L}_j}=\begin{bmatrix} 1 & -\sin\phi_j & 0 \\ \sin\phi_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

であるから、廻転角ϕ, ϕ_jは微小であるとして、

$$\mathbf{H}_{\xi j} \doteq \begin{bmatrix} -1 & \sin\phi_j - \sin\phi & 0 \\ \sin\phi - \sin\phi_j & -1 & 0 \\ -\tilde{\eta} + \sin\phi_j(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) & (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) + \tilde{\eta}\sin\phi_j & -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

であるから(2)式における$\mathbf{p}_{m\xi} = \mathbf{p}'_{m\xi} + \Delta\mathbf{p}_{m\xi}, \mathbf{p}_{mj} = \mathbf{p}'_{mj} + \Delta\mathbf{p}_{mj}$とすると第$I$部材の$P$点におけるひずみベクトル増分$\Delta\mathbf{e}_{m\xi}$の外、有限部材廻転角にともなう見かけのひずみベクトル増分$\Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi} = [1 - \cos\Delta\theta_\xi \ 0 \ 0]$ を用い、有限変位仮想仕事を適用して、大変形構造解析の基礎式

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{8}$$

ここに

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T, \mathbf{b} = \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{F}_m\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_\theta \tag{9}$$

を得る。$\mathbf{K}$は剛性マトリックス、$\Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{p}$は中間状態からのそれぞれ変位および外力の増分、$\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C}$は、変形後の接続マトリックスで、$\mathbf{b}$は大変形補正項、$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}, \mathbf{F}_m = diag\{\mathbf{F}_{m,I}\}, \mathbf{p}_m = \{\mathbf{p}_{m,I}\}, \Delta\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_{m\theta,I}\}$ である。$\mathbf{p}_{m,I}$はI部材の終端における部材端応力で$\mathbf{p}_m$は$\mathbf{p}_{m,I}$のブロック列ベクトルである。

また、

$$\mathbf{F}_{m,I} = \int_\ell (\mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \mathbf{H}_{\xi j}) d\xi' \ , \ \Delta\mathbf{F}_{m,I} = \int_\ell \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \Delta\mathbf{H}_{\xi j} d\xi' \ , \ \Delta\mathbf{H}_{\xi j} = \mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}$$

$$\Delta\mathbf{e}_{m\theta,I} = -\int_\ell \mathbf{H}_{\xi j}^T \Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi} d\xi' \ , \ \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \mathbf{0} \\ & 0 & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \tag{10}$$

である。

上式は、部材長ℓの全長にわたる積分を意味する。

３、幾何剛性マトリックス

（８）式において、$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$ すなわち中間状態における$\Delta\mathbf{p}$の変分$\delta\Delta\mathbf{p}$を求める。

$$\delta\Delta\mathbf{p} = \{\mathbf{K}_E + \left(\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right)_{\Delta\mathbf{d}=0} \overline{\mathbf{p_m}}' - \mathbf{C}'\mathbf{K}_m \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right)_{\Delta\mathbf{d}=0} \overline{\mathbf{p_m}}'\}\delta\Delta\mathbf{d} \tag{11}$$

ここに $\mathbf{K}_E = \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T$ は弾性剛性マトリックスで

$$\mathbf{K}_G = \left(\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right)_{\Delta\mathbf{d}=0} \overline{\mathbf{p_m}}' - \mathbf{C}'\mathbf{K}_m \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right)_{\Delta\mathbf{d}=0} \overline{\mathbf{p_m}}' \tag{12}$$

は幾何剛性マトリックスであり、$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G$は、接線剛性マトリックスである。なお

$$\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}} = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_1} \ \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_2} \ \cdots\right] \quad , \quad \overline{\mathbf{p_m}}'^T = \left[\mathbf{p}_m'^T \ \ \mathbf{p}_m'^T \ \ \cdots\right] \tag{13}$$

ピン結合で部材に軸力のみが作用する場合には、(12)式の右辺第２項は現れない。剛結骨組構造で、部材に曲げモーメントやせん断力が作用する場合には、(10)と(11) 式より平衡マトリックス$\mathbf{H}_{\xi j}$に係わる項を無視できない。この項は、局部座屈に深く関係する。

４、適用

(12)式において、一端固定、他端自由の柱の座屈の解析を試みた。柱の分割数を多くすれば、(12)式の右辺第２項を用いなくても、理論座屈荷重に一致する。(12)式右辺第２項を考慮する場合には、分割しなくても、完全に理論座屈荷重に一致する。また、種々の境界条件をもつ柱の座屈解析を試みたが、その結果は川井の有限要素法による座屈解析の値に完全に一致した。

参考文献

1) Miike,R.,Kobayasi,I,Yamada,Z:"Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures" ;ASCE,1990
2) 川井忠彦:"座屈問題解析";培風館,1974