土木学会第49回年次学術講演会（平成6年9月）

CS - 69　DDP 法による潮汐流の制御解析

中央大学　正員　安重 晃
中央大学　正員　川原 睦人

1. はじめに

本論は、潮流場に支配される閉鎖性海域の海水循環問題に最適制御理論を適用したものである。

ここでは、仮想的な問題として、東京湾の海水を循環させ水質の改善を行う問題を設定し、水門における最適な操作流量を最適制御理論を用いて求めることを考える。又、最適制御の方法としては、微分動的計画法 (Differential Dynamic Programming, DDP 法) を採用し、本法の適用性について検討を行う。

2. 基礎方程式

潮流の流れ場は、以下に示す線形の浅水長波方程式で記述されるものと仮定する。

$$\frac{\partial q_x}{\partial t}+gh\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t}+gh\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}=0 \tag{3}$$

ここで、q_x, q_yは、それぞれ x 方向及び y方向の流量成分を示しζは水位変動量を示す。又、gは重力加速度,h は水深を示す。

2.1 有限要素方程式

流量及び水位に対して、三角形一次の内挿関数を仮定し (1),(2),(3) にガレルキン法を適用して有限要素方程式を導けば次式を得る。

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_{x\beta}+ghS_{\alpha\beta x}\zeta_\beta=0 \tag{4}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_{y\beta}+ghS_{\alpha\beta y}\zeta_\beta=0 \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\zeta}_\beta+S_{\alpha\beta x}q_{x\beta}+S_{\alpha\beta y}q_{y\beta}=0 \tag{6}$$

(4),(5),(6) 式の時間方向の離散化には二段階陽的解法を適用する。

3. 最適制御

ここでは説明を簡単にするために、先に求めた有限要素方程式を次式のように簡略化して表しておく。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u} \tag{7}$$

ここで、$\boldsymbol{x}$及び$\boldsymbol{u}$はそれぞれ状態量 (流量, 水位上昇量) と操作量 (制御流量) を表している。

ここでは評価関数を次のような2次形式の関数として定義する。

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} G(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f}\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_d)^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_d)+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\right)dt \end{aligned} \tag{8}$$

ここで、$\boldsymbol{x}_d$ は参照値であり、状態量 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_d$ に近くなるように制御されれば評価関数が減少するように設定したものである。t_0は制御開始時刻を示し t_fは制御終了時刻を示す。又、$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$の両マトリックスは、重み係数である。この評価関数 Jを最小にする制御流量 u を、最適制御理論を用いて決定する。

3.1 DDP 法の適用

本研究では、最適制御の方法としてＤＤＰ法を採用している。以下でＤＤＰ法の基本的な考え方を説明する。

はじめに、以下のような関数 Vを定義する。

$$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\min_u\left\{\int_t^{t_f}G(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(\tau),\tau)d\tau\right\} \tag{9}$$

ここで $t_0\le t\le t_f$である。(8) 式の評価関数の停留条件として、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial V_{\boldsymbol{x}}}{\partial t}+\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_d)+\boldsymbol{A}^TV_{\boldsymbol{x}}=0 \tag{10}$$

ここで $V_{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}$である。また、(9) 式において $t=t_f$ とすれば、上式の終端条件として次式が得られる。

$$V_{\boldsymbol{x}}(t_f)=0 \tag{11}$$

さらに、操作量$\boldsymbol{u}$の修正量$\delta\boldsymbol{u}$の関係式として次式が得られる。

$$\delta\boldsymbol{u}=-\epsilon(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}^TV_{\boldsymbol{x}}) \tag{12}$$

ここで、ϵ は微小な調整パラメータである。

最終的には式 (4)〜(6) と式 (10),(12) を同時に満足するような解を、繰り返し計算で求め最適制御解を求める。

3.2 計算手順

以下に DDP 法を用いた最適制御のアルゴリズムを示す。

i) 操作量 $\boldsymbol{u}^{(0)}$を仮定する 。$k=0$

ii) $\boldsymbol{u}^{(0)}$ を用いて (4)〜(6) 式を順時間方向に逐次時間積分し状態量$\boldsymbol{x}^{(0)}$を求める。

iii) 評価関数 $J^{(0)}$を求める。

iv) (10) を逆時間方向に逐次時間積分を行い $V_{\boldsymbol{x}}$を求める。

v) (12) より操作量の修正量$\delta\boldsymbol{u}$をを求める。

vi) $\delta\boldsymbol{u}$が収束 ($\simeq 0$) していれば終了。

vii) $\boldsymbol{u}^{(k+1)} \leftarrow \boldsymbol{u}^{(k)} + \delta\boldsymbol{u}$

viii) $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$より (4)〜(6) 式を用いて$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$を求める。

ix) $J^{(k+1)}$ を計算する。

x) $J^{(k+1)} > J^{(k)}$ならば$\epsilon \leftarrow \epsilon \times 0.8$ として v.) へ戻る。

xi) $\epsilon \leftarrow \epsilon \times 1.2$ とし $k = k+1$ として iv.) へ戻る。

4. 数値計算例

図-1 に計算に用いたメッシュ図を示す。Ａ地点及びＢ地点において潮汐水位を境界条件として与え、Ｃ地点で制御流量を与えるものとする。Ａ，Ｂ地点の潮汐データは、それぞれ横須賀と銚子の潮汐データを潮位表から参照し、主要４分潮の重ね合わせとして式 (13) で表現する。

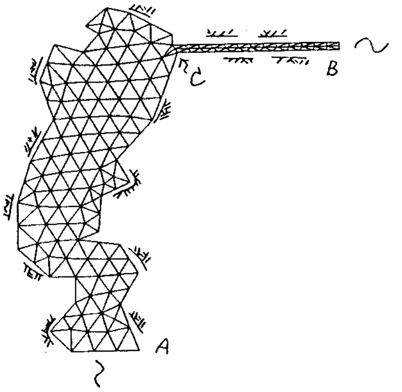
$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{4} H_i \cos(\frac{2\pi}{T_i}t - k_i) \tag{13}$$

ここでは、海水の循環を評価関数で表現するために、具体的には以下のような定義を用いている。

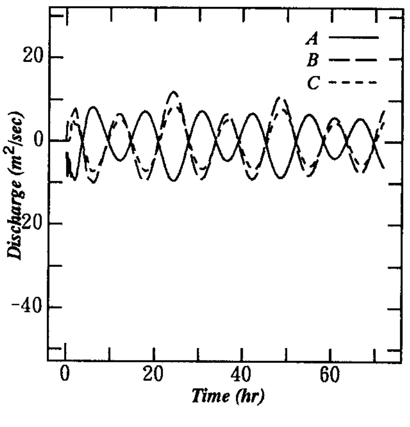
$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i}^{A\text{ 地点の節点}} (q_{yi} - q_d)^2 dt \tag{14}$$

ここで、$q_d = -10.0m^2/sec$ としている。

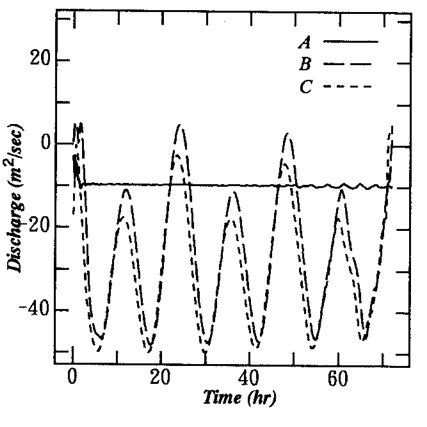
図－ 2,3 に A,B,C 点での流量の経時変化を示す。制御しない場合の流量変化は、$0m^2/sec$ を中心にして周期的な変化をしており、湾内の海水の循環は殆ど行われていないことがうかがわれる。それに対して、制御をした場合の A の流量変化は、定常的に $-10m^2/sec$ の外洋に向かう流れが生じており、海水循環が行われていることがうかがわれる。



図－１　メッシュ図



図－２　制御しない場合の流量変化



図－３　制御した場合の流量変化