

CS - 68

ダイナミック プログラミングによる地盤温度の最適制御解析

中央大学 学生員 佐々木 建一

中央大学 正 員 川原 睦人

1 はじめに

近年、ゴルフ場での農薬散布による環境汚染が懸念されている。特にグリーンに多く用いられる芝は、寒冷地に適した植物であり、日本の高温多湿な夏季の自然環境には適さない。また、冬季には霜等により芝が枯れ、美しい緑色を保つために相当な労力が必要になる。

そこで、地中にパイプを埋設し、適温の水を流して地温を制御すれば芝の生育環境を良く出来ると考えられる。そうすれば、農薬の使用量と労力を削減できるのはずである。本論は、ある地点の温度を任意に保てるように最適な通水温度を逐次時間ごとに決定する手法を提案するものである。最適温度の決定手法としては、最適制御理論の一つである離散型 ダイナミックプログラミング (DP) により求める。なお、基礎方程式には非定常熱伝導方程式を用いた。基礎方程式中に存在する熱伝導係数には、現地観測データにより同定した結果を用いた。

2 基礎方程式

地中の温度変化を示す方程式として二次元非定常熱伝導方程式を用いる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = Q \quad (1)$$

ここで、 κ は熱伝導係数、 Q は熱源を表す。この方程式を空間方向に有限要素法、時間方向に陰的オイラー法を用いて離散化すると、

$$T_{k+1} = (M + \Delta t S)^{-1} M T_k \quad (2)$$

離散化された有限要素方程式が得られる。ここで、 M 、 S 、 Δt は、質量行列、剛性行列、時間増分をそれぞれ表す。また、添字の k は時間ステップを意味する。この方程式を状態量、操作量、外力に分割すると次の状態方程式が得られる。

$$T_{k+1} = A T_k + B u_k + C f_k \quad (3)$$

ここで、 T は n 次元状態ベクトル、 u は k 次元操作ベクトル、そして f は m 次元外力ベクトルをあらわす。 A 、 B 及び C は $n \times n$ 行列、 $n \times k$ 行列、 $n \times m$ 行列をそれぞれ表す。

3 ダイナミック プログラミング

地盤制御問題において、地中の任意の地点の温度を任意の温度に保つために次の評価関数を設定する。

$$J = \min_u \left(\sum_{k=0}^K \left[(T_k - T^*)^T Q (T_k - T^*) + (u_k - u^*)^T R (u_k - u^*) \right] + (T_{K+1} - T^*)^T Z (T_{K+1} - T^*) \right) \quad (4)$$

ここで、 Q 、 R 、 Z は重み行列を表し T^* 、 u^* は状態量、操作量の目標温度を表す。これらは確定関数であるものとする。

ここでは、DP を用いて、(4) 式を最小にする操作量を求める。いま、 $V(T, k)$ を次式で定義する。

$$V(T, k) = \min_u \left(\sum_{j=k}^K \left[(T_j - T^*)^T Q (T_j - T^*) + (u_j - u^*)^T R (u_j - u^*) \right] + (T_{K+1} - T^*)^T Z (T_{K+1} - T^*) \right) \quad (5)$$

$V(T, k)$ を k 番目と $k+1$ 番目以降に分割し、最適性の原理を用いて整理すると次式を得る。

$$V(T, k) = \min_{u_k} \left\{ (T_k - T^*)^T Q (T_k - T^*) + (u_k - u^*)^T R (u_k - u^*) + V(T_{k+1}, k+1) \right\} \quad (6)$$

これがDPの最適条件式であり、この方程式の終端条件は、 $V(T, k)$ の定義より

$$V(T, K+1) = (T - T^*)^T Z (T - T^*) \quad (7)$$

となる。これから直接最適操作量を求めるのは困難であるので、 $V(T, k)$ の解の形を次のように仮定する。

$$V(T, k) = b_k + 2p_k^T T + T^T P_k T \quad (8)$$

ここで、 b_k 、 p_k 、 P_k はそれぞれスカラー、 n ベクトル、 $n \times n$ 対称マトリックスを表す。

(8) 式を用いて最適条件式を書き直し、両辺を u_k で微分して 0 とおくと、最適操作量 u_k は、

$$u_k = -(R + B^T P_{k+1} B)^{-1} (B^T P_{k+1} A T + B^T P_{k+1} C f_k + B^T p_{k+1} - R u^*) \quad (9)$$

で与えられる。(6)式に、(8)、(9)式を代入して、 P_k 、 p_k について整理すると、次の離散型リカッチ方程式が得られる。

$$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A \quad (10)$$

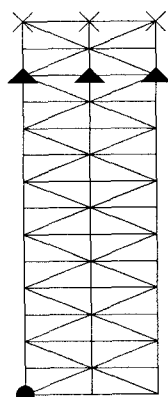
$$p_k = A^T p_{k+1} + A^T P_{k+1} C f_k - Q T^* - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} C f_k - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T p_{k+1} + A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} R u^* \quad (11)$$

また(10)、(11)式の境界条件は、(5)、(7)式より、

$$P_{K+1} = Z \quad (12)$$

$$p_{K+1} = Z T^* \quad (13)$$

で与えられる。



$$\text{熱伝導係数 } \kappa_1 = 0.697 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$$

$$\text{熱伝導係数 } \kappa_2 = 1.299 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$$

× 上部境界点

▲ 目標点

● 操作点 (パイプ)

図-1 有限要素モデル

4 数値解析例

図-1に示す有限要素モデルを用いて解析を行った。目標点は、地表面から2cm下を想定した上部境界より4cm下の点に設定した。また、パイプ設置位置は地表面から30cm下とした。 T^* 、 u^* は、それぞれ22℃と15℃とした。

上部境界に用いた温度データは、93年8月25日16:30~9月8日10:00までの地表面から1cm下の点で、千葉県農業試験場において得られたデータを用いた。評価関数の重み Q 、 R 、 Z は、対角要素に1.0、0.001、1.0をそれぞれ用いた。

図-2は、制御しないと時の上部境界、目標点、および操作点における温度変化を表している。図-3は、制御したときの上部境界、目標点、および操作点での最適操作量の温度変化を表している。

5 おわりに

最適制御理論により、任意の地点の温度を、目標温度に保つことができた。しかし、地表面の温度が、全制御時間にわたって予め既知である必要がある。これを解消するために、温度を予測し、確率最適制御理論を用いる必要がある。

参考文献

- [1] L. MEIER III, et.al, "Dynamic Programming for Stochastic Control of Discrete System," IEEE Trans. Contr., vol. AC-16, no.6 pp 767-775, 1971.

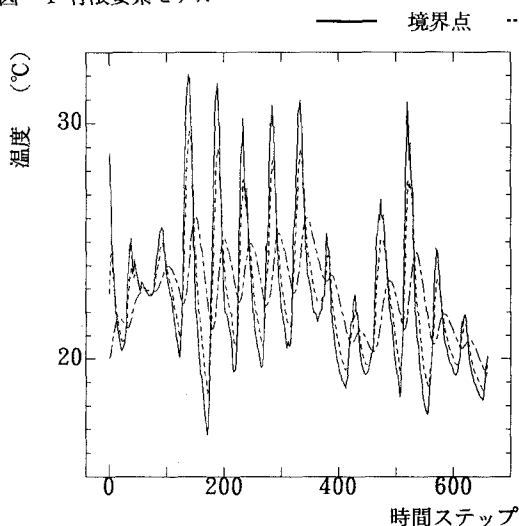


図-2 制御無しの温度変化

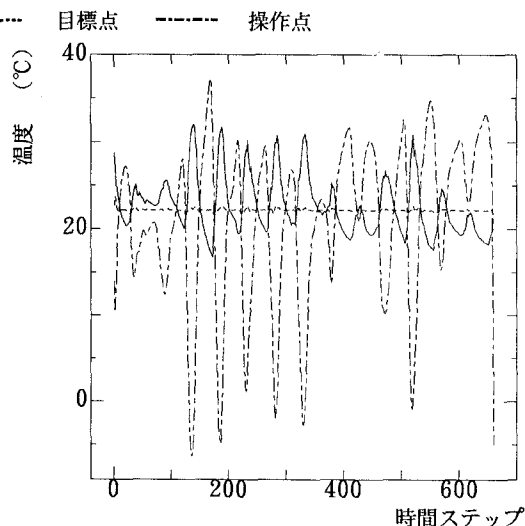


図-3 制御時の温度変化