

○ 中央大学 学生員 稲本 耕介
(株) INA 正員 高木 利光
中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

海岸における波浪の解析は、沿岸の防災という問題にも通ずる大変重要な問題であり、数値計算による解析も様々になされている。しかし今までの数値計算では、設定された初期条件、境界条件、およびモデル中のパラメータ等に対して、いかに正しく計算されるかということに主眼が置かれてきた。

しかし、それらの条件には不確実な要素が多く含まれることから、実際に観測されるデータを効率的に取り込み、より現実 に即した計算結果を求めることを考える。

ただ観測データにはモデル化されていない現象(たとえば非線形現象など)や観測時の雑音等が含まれていることから、そのデータには適切な処理が必要になってくる。

本研究は与えられる情報が観測点における状態量データのみで確定的な入射波条件がわからないという状況の下で、観測値に即し、正しい現象を表せるような推定値を得ることを目的とする。そのためにカルマンフィルタ理論を用いた状態量推定を行った。またその解析には非定常緩勾配方程式を用いた有限要素法によって行い、状態量推定のカルマンフィルタアルゴリズムに適用した。本報告においては、二次元の湾型領域において入射波条件がないときと仮定したときの推定値の違いについて検討を行った。

2 解析モデル

波浪伝播を表す式として Berkhoff の緩勾配方程式がある。ここではその式と等価である以下の非定常緩勾配方程式(西村ら^[1])を確定解析の基礎方程式として用いるものとする。

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (n q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (n q_y) \right\} = 0 \quad (3)$$

ここに、 q_x, q_y は x, y 方向への線流量、 η は水位変動量を表す。 c は波速、 n は「波速と群速度の比」であり、以下

の関係を持つ。

$$c = \frac{g}{k} \sqrt{\tanh kh}, \quad n = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (4)$$

式(4)において g は重力加速度、 h は水深、 k は波数であり、それぞれと角周波数 ω との間に次の分散関係式が成立している。

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (5)$$

2.1 有限要素方程式

線流量および水位に対してその空間近似には三角形一次要素による内挿補間関数を用い、ガラーキン法を適用すると以下の有限要素方程式を得る。

$$M_{\alpha\beta} \dot{q}_{i\beta} + c^2 H_{\alpha\beta}^i \eta_\beta = 0 \quad (6)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\beta + H_{\alpha\beta}^i q_{i\beta} + \frac{1}{n} S_{\alpha\beta\gamma}^i n_\beta q_{i\gamma} = 0 \quad (7)$$

($k = x, y$)

また時間方向離散化については、一段階の陽的解法を用いるものとする。

3 カルマンフィルタ

3.1 基礎方程式

カルマンフィルタの基礎式を構成するのは離散時間では以下に示す状態式と観測式である。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (8)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v} \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は未知変数ベクトル、 $\mathbf{y}$ は観測量ベクトル、 $\mathbf{A}$ は状態量遷移行列、 $\mathbf{H}$ は観測行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ はそれぞれシステム雑音、観測雑音である。さらにこれらの雑音に対して以下の性質を有するものとする。

$$E\{\mathbf{w}_k\} = 0, \quad cov\{\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j\} = E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T\} = \mathbf{Q} \delta_{kj} \quad (10)$$

$$E\{\mathbf{v}_k\} = 0, \quad cov\{\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j\} = E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T\} = \mathbf{R} \delta_{kj} \quad (11)$$

ここに、 $E\{\}$ は期待値、 δ はクロネッカーのデルタを示す。また、雑音は白色ノイズとし $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ は互いに独立であるとする。

3.2 アルゴリズム

状態量推定値、推定誤差共分散に対して、正規過程の仮定に基づいて、以下のような時間更新、観測更新としてまとめられたアルゴリズムが導かれる。観測ベクトル y_k を取り込んで初期値から繰り返すことにより、各時間での推定値 $\hat{x}_k$ と誤差分散 P_k が得られる。

初期値

$$x_0^* = \bar{x}_0 \quad (12)$$

$$P_0^* = V_0 \quad (13)$$

時間更新 (time update)

$$x_{k+1}^* = A \hat{x}_k \quad (14)$$

$$P_{k+1}^* = A P_k A^T + G Q G^T \quad (15)$$

観測更新 (measurment update)

$$K_k = P_k^* H^T (H P_k^* H^T + R)^{-1} \quad (16)$$

$$P_k = (I - K_k H) P_k^* (I - K_k H)^T + K_k R K_k^T \quad (17)$$

$$\hat{x}_k = x_k^* + K_k (y_k - H x_k^*) \quad (18)$$

4 数値計算例

カルマンフィルタの適用性の検討のために、今回は図-1の様な一様水深の二次元湾型領域における状態量推定を行った。A-D 端より正弦波が垂直に入射する現象を考える。波の周期は2秒～20秒で数種行った。この例では入射波条件を仮定した場合と、入射波条件がない場合について行ったが入射波条件を仮定した場合には観測値に追従した推定結果が得られた。

次に実観測データを用いた解析を行った。この例では周期20秒、振幅0.8mの入射条件を仮定している。図-2は観測値図-3は推定結果である。解析結果は特に波高に関して観測データの影響を受けていることが分かる。

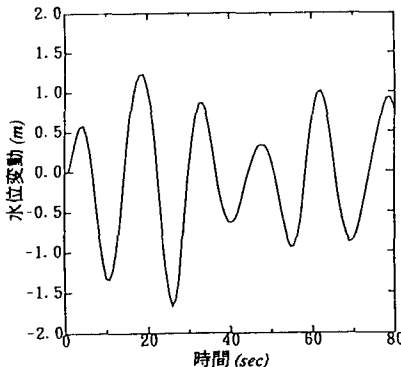


図-2 実観測データ

5 考察

- 入射波条件がない例では観測点の配置や観測点数によって推定結果に違いがみられ、特に波の進行方向で観測値の反対側では位相のずれも見られる。
- 入射波条件を何らか仮定した場合にはその条件が観測値を表す平均的なものであれば、他の点での推定値は観測値に即した結果が得られ、本手法の有用性が見られる。
- その場合はあらかじめ設定するシステム雑音、観測雑音によって推定値に違いがみられ、システム雑音の値が大きいくほど観測値に依存する結果が得られた。

参考文献

- Nishimura, H., K. Maruyama, and H. Hiraguchi, 1983: Wave field analysis by finite difference method, Proc. 30th Japanese Conf. on Coastal Eng., JSCE, pp. 123-127
- Frank L. Lewis, Optimal Estimation, A Wiley-Interscience Publication, 1986

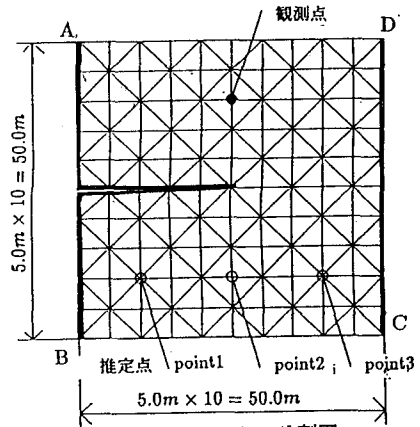


図-1 メッシュ分割図

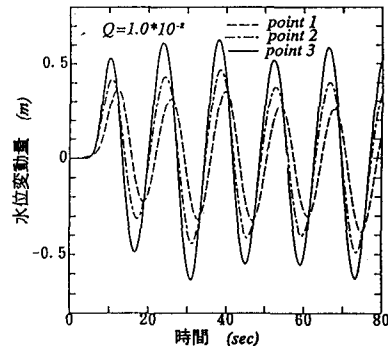


図-3 防波堤内での推定値