

CS - 65

確率有限要素法による不規則波動解析

日本工営 正会員 櫻庭雅明
中央大学 正会員 櫻山和男

1. はじめに

従来の水面波動解析では、入力データは確定的なものと仮定され解析が行われてきた。しかしながら、入力データには多くの不規則性が含まれており、その不規則性に起因する変動量を考慮することは工学上重要である。

本論文では、不規則波の数値解析法として、入力データである波の入射角の不規則性を確率密度関数で与え、摂動法に基づいた有限要素法を適用した結果を報告する。なお、解析例としては任意形状港湾の湾水振動解析を行い、従来行われてきた繰り返し計算との比較を行った。

2. 基礎方程式と境界条件

水面波動問題の解析における基礎方程式としては、緩やかな水深変化を考慮した緩勾配方程式を用いる。

$$(CC_g \eta_{,i})_{,i} + k^2 CC_g \eta = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここに、 η は合成波の振幅関数、 C は波速、 C_g は群速度、 k は波数、 Ω は解析領域を示す。境界は図-1に示すように、構造壁面境界 Γ_s と無限遠方の仮想境界 Γ_∞ に分けられ、境界条件は次式で与えられる。

$$\eta_{,n} = ik \sin \alpha \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \eta \quad \text{on } \Gamma_s \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\eta_{sc,r} - ik \eta_{sc}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_\infty \quad (3)$$

ここで、 α は構造壁面での反射角、 η_{sc} は散乱波の振幅関数、 r は散乱源からの距離、 K_r は壁面反射率、 i は虚数単位である。

3. 有限要素方程式

基礎方程式と境界条件の離散化には、水深変化を許容する内部領域 Ω_i には Kashiya, Kawahara^[1] が提案した境界型有限要素法、水深一定を仮定した外部領域 Ω_o には固有関数展開表示された解析解^{[2][3]}を用いた結合解法を適用する。また、内部領域 Ω_i には三角形境界型有限要素、外部領域 Ω_o には開境界 Γ_o 上に幾つかの節点を持つ特殊要素を用いて離散化を行うと、最終的に次式のような有限要素方程式が得られる。

$$[K] \{\eta\} = \{F\} \quad (4)$$

ここに、 $[K]$ は対称な剛性マトリックス、 $\{F\}$ は入射波による荷重ベクトルである。

4. 摂動法に基づいた確率有限要素解析^[4]

本解析では、波の入射角 θ_{in} が変動するものと仮定し、それぞれの期待値 $\bar{\theta}_{in}$ と確率変数 μ_k を用いて表すと次式で示される。

$$\theta_{in} = \bar{\theta}_{in} (1 + \mu_k) \quad (5)$$

ここに k は変動の含まれる要素の番号を表す。上式を考慮して重ね合わせを行った有限要素方程式は、未知量を含んだ形になり直接的に解を求めるのは困難になる。振幅関数の変動の評価としては、未知量を含んだ荷重ベクトル及び振幅関数を確率変数の次式のように期待値のまわりに2次の項までテイラー級数展開を行い、摂動法によって解の変動率を導出した。

$$\{F\} = \{\bar{F}\} + \sum_{k=1}^n \{F_k^I\} \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{F_{kl}^{II}\} \mu_k \mu_l \quad (6)$$

$$\{\eta\} = \{\bar{\eta}\} + \sum_{k=1}^n \{\eta_k^I\} \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{\eta_{kl}^{II}\} \mu_k \mu_l \quad (7)$$

ここに、各式の右辺第1項は確定項、第2項は1次変動率、第3項は2次変動率を表す。(6)、(7)式を(4)式に代入し、各項で等置することにより、振幅関数の確定解及び変動率は次式で求められる。

$$\{\bar{\eta}\} = [K]^{-1} \{\bar{F}\}, \quad \{\eta_k^I\} = [K]^{-1} \{F_k^I\}, \quad \{\eta_{kl}^{II}\} = [K]^{-1} \{F_{kl}^{II}\} \quad (8)$$

ここに、 $\bar{\eta}$ は確定解を表す。なお、得られた変動率による統計量の評価には1次近似法及び2次近似法^[5]を用いて平均、分散を求めた。

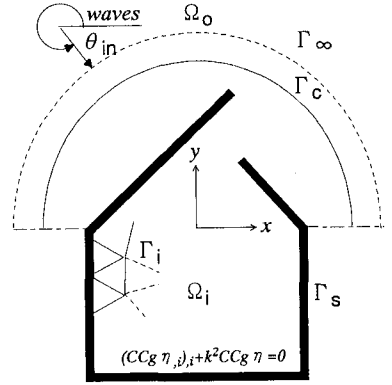


図-1 領域の定義

5. 数値計算例

本手法の数値計算例として、図-2に示す任意形状港湾の港内静穏度解析への適用を行った。水深は領域全体を5mと仮定し、壁面での反射率は0.85、入射波の周期は5秒を仮定した。入射波の波向きの期待値は湾口に対して直角に入射することを仮定した。本解析では、摂動法の有効性を示すために、港内の点Aにおける1次及び2次摂動解と、直角入射から $\pm 45^\circ$ 変化させたときの確定的計算との比較を行った。図-3にA点でのそれぞれの入射角における確定解と摂動解の比較を示す。1次摂動解に若干の差異が見られるが、2次摂動解においては確定解と良い一致を示した。また、得られた摂動解から2次近似法を用いて、振幅関数の期待値を計算し、従来法である確定的繰返し計算法との比較を行った。図-4に入力データの標準偏差を0.05としたときの両手法の比較を示す。標準偏差を比較的小さく仮定したため、変動率における影響は比較的小さいことが確認される。図-5に標準偏差を0.1と仮定した場合の両者の比較を示す。図より本手法で行った計算結果は従来法と比較的良好一致を示し、繰返し計算を行わずに波向きの変動を考慮した計算が可能になった。なお、繰返し計算は $\theta_{in} = 225^\circ \sim 315^\circ$ まで 5° おきに計算を行い、正規分布に従って重みを乗じ、重ね合わせを行っている。

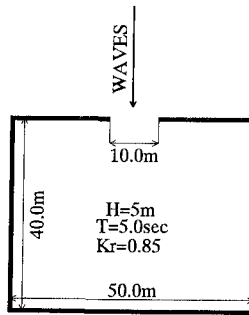


図-2 解析モデル

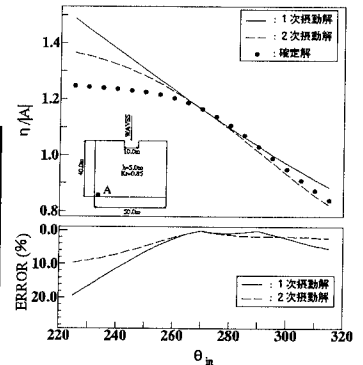
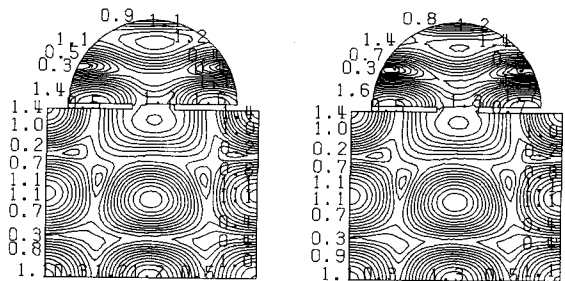


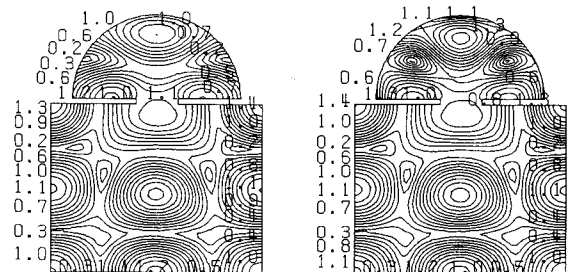
図-3 確定解と摂動解の比較



繰返し計算法

本手法

図-4 相対振幅分布図 ($\sigma=0.05$)



繰返し計算法

本手法

図-5 相対振幅分布図 ($\sigma=0.1$)

6. おわりに

本論文において、摂動法に基づく有限要素法を不規則波の水面波動問題に適用することの検討を行った。その結果、本手法は波の不規則性に起因する計算結果の変動量を、繰返し計算をする必要がなくなることで、従来方法に比べ計算時間の点で大変有利になることが確認された。今後の課題は摂動解の精度の検討を行うとともに、複数の不規則成分を考慮した水面波動解析を行い、本手法の不規則波解析の有効性についてさらに検討を行う予定である。

参考文献

- [1] Kashiya .K and Kawahara .M A boundary type finite element method for water surface wave problems, Int. J. Number. Methods Fluids, Vol.8 pp.65-69,1988
- [2] Chen, H.S., and Mei, C.C., Oscillations and wave forces in an offshore harbor, Ralph M. Persons Lab., MIT, Report No.190,1974
- [3] Chen, H.S., Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, Appl. Ocean Res., Vol.8, pp.99-104, 1986
- [4] 中桐滋, 久田俊明: 確率有限要素法入門, 培風館出版, pp.28-29, 1990
- [5] Ang, A.H-S. and Tang, W.H., Probability, Statistics, and Decision for Design, Vol. I-Basic Principles, John Wiley and Sons, pp. 194-196, 1977