

佐藤工業 正 員 児玉敏雄
中央大学 正 員 川原睦人

1. はじめに

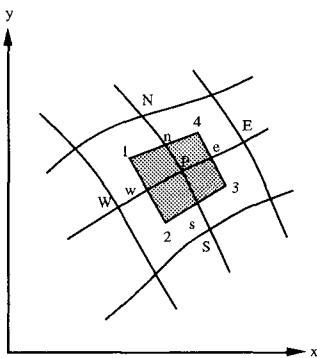
最近数値流体解析の分野で注目されている有限体積法(FVM)による線形の浅水長波方程式の解析を行った。有限体積法は有限要素法(FEM)と差分法(FDM)の長所を兼ね備えた手法である。この方法は、変分や重み関数を用いないため、有限要素法に比べ係数行列の次数が低くなるのが特徴である。したがって、計算時間や記憶容量が少なくすみ、主に3次元の非圧縮性流体解析に多く用いられているようであるが¹⁾、この手法を浅水長波方程式の解析に適用し、その特質を論じた報告は少ない。本報告では線形な浅水長波方程式をコントロールボリューム法²⁾に基づいた有限体積法により定式化し、進行波の伝播の例題を用いて従来の有限要素法と主に計算時間の比較を行った。また、有限体積法の計算結果にみられる疑似の振動解の安定化手法を示すこととした。

2. 有限体積法による基礎方程式の離散化

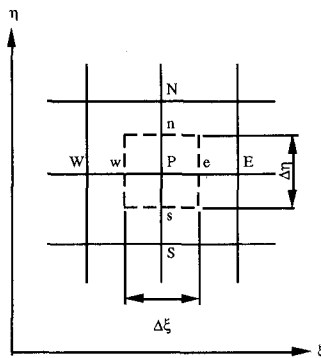
基礎方程式として以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \cdots (1), \quad \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \cdots (2), \quad \frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \cdots (3)$$

ここで、 u, v, h, g, H は平均流速成分、水位上昇量、重力加速度、水深をそれぞれ表す。いま、任意の四角形要素を用いて空間の離散化を行うことを考える。図-1に全体座標系および局所座標系を示す。全体座標系と局所座標系による空間微分の関係は、次式のようにになる。



(a) global coordinate



(b) local coordinate

図-1 座標系

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdots (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \cdots (5)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

これらの関係は、 v, h についても同様である。これらを基礎方程式に代入し、図-1(b)で示されるコントロールボリュームで積分することにより離散化方程式が以下のように導かれる。

$$\Delta \xi \Delta \eta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[\left(gh \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_e - \left(gh \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_w - \left(gh \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_n + \left(gh \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_s \right] = 0 \cdots (6)$$

$$\Delta \xi \Delta \eta \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[- \left(gh \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_e + \left(gh \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_w + \left(gh \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_n - \left(gh \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_s \right] = 0 \cdots (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta \xi \Delta \eta \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[\left(Hu \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta - Hv \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_e - \left(Hu \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta - Hv \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta \right)_w \right. \\ \left. + \left(-Hu \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + Hv \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_n - \left(-Hu \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + Hv \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi \right)_s \right] = 0 \cdots (8) \end{aligned}$$

3. 数値計算例

長さ10m, 幅0.4m, 一定水深10mの矩形水路を想定し, 進行波の計算を有限体積法, 有限要素法により行った. 各手法の要素分割を図-2に示す. 有限要素法では三角形要素を用いているが, 自由度は等しい. 水路の左端入口より周期1秒振幅0.1mの正弦波を与えた. 水路右端では, 透過条件を与えている. 計算に用いた微小時間増分は, $\Delta t=0.005$ 秒である. 計算開始後450ステップ目(実時間で2.25秒後)の有限体積法による計算水位を図-3に示す. 2節で示した定式化のままでは, 図に示すような疑似の振動が生ずる. この振動を消去するため, 非圧縮性流体の解析でよく用いられている, 人口粘性

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\nu=0.1)$$

を付加した. その時の計算結果を図-4に示す. 計算値は解析解とよく一致している. 有限要素法の結果はここでは省略するが, 解析解とよく一致した. 本計算1000ステップに要したCPU時間はSun-4/330を用いて, FEMが53.6秒, FVMが64.8秒であった. なお, 両手法のプログラムはほぼ同様に組まれていると考えて差し支えない.

4. おわりに

有限体積法による浅水長波方程式の定式化を行った. 同一の条件のもとで進行波の解析を実施し, 有限要素法とCPU時間の比較を行ったところ, 有限体積法の方が有限要素法に比べて, 約2割計算時間を多く要することがわかった. CPU時間の差はプログラミングの方法や計算機の種類により大きく左右されるので, この結果に一般性はないものの, 解析手法を選ぶ場合の一つの目安になるものと考えられる.

参考文献

- [1] M. Vinokur: "An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws", Journal of Computational Physics, 81, pp.1-52, 1989.
- [2] S. V. Patankar: "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

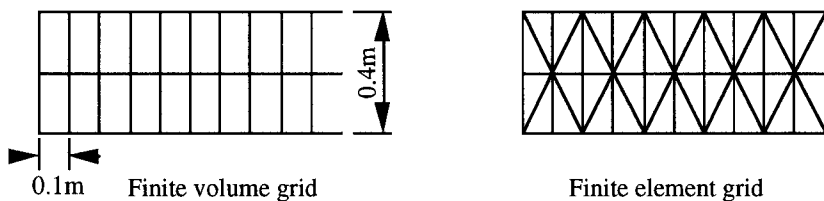


図-2 要素分割図

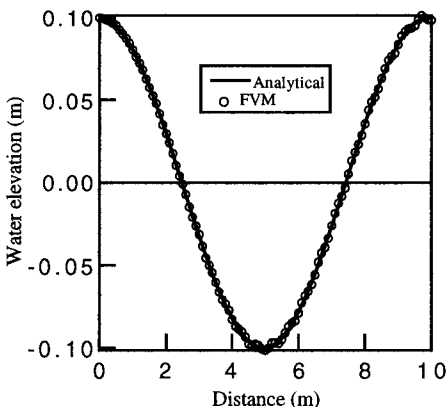


図-3 計算水位 (人口粘性なし)

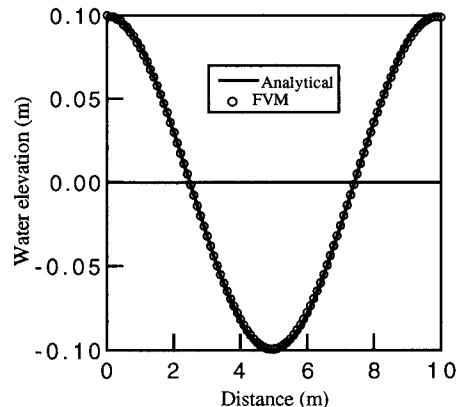


図-4 計算水位 (人口粘性あり)