

CS - 59

一般曲線座標系を用いた2次元流況解析

徳島大学工学部 正 員 岡部健士

徳島大学大学院 学生員○山下秀基

徳島大学大学院 学生員 林 雅隆

1. 概説 2次元流況の計算手法としては、基礎方程式の記述形式やその数値解法が相違した種々のものが提案されている。しかし、河道の幾何条件が複雑で、しかも常・射流の遷移を伴う場合の計算は必ずしも容易でない。本文では、このような条件下の流れの実用的解法として、任意の斜交・曲線座標について記述されたSt.Venant方程式をMacCormackの2段階差分法により数値解析する方法に注目し、本法の適用上の諸問題ならびにその有用性について検討した結果を報告する。

2. 基礎式 直交直線座標(x, y)における2次元のSt.Venant方程式を、一般曲線座標(ϕ, ψ)におけるものへ変換すると以下になる¹⁾。

$$\partial A / \partial t + \partial B / \partial \psi + \partial C / \partial \phi = D_\psi + D_\phi \quad (1)$$

ただし、 A, B, C, D_ψ および D_ϕ は従属変数のベクトルで以下のように定義されるものである。

$$A = \begin{bmatrix} h/J \\ u^* h/J \\ u^* h/J \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left[\left[u^* u^* h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right] - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left[u^* u^* h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right] - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left[\left[u^* u^* h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right] - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left[u^* u^* h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right] - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix}$$

$$D_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \cdot gh(SX_{0\psi} - SX_{1\psi}) \\ 1/J \cdot gh(SY_{0\psi} - SY_{1\psi}) \end{bmatrix} \quad D_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \cdot gh(SX_{0\phi} - SX_{1\phi}) \\ 1/J \cdot gh(SY_{0\phi} - SY_{1\phi}) \end{bmatrix}$$

また、 J は座標変換のヤコビアン($J = \phi_x \phi_y - \phi_y \phi_x$)である。ここに、 t は時間、 u^*, u^*, u^* および u^* はそれぞれ x, y, ϕ および ϕ 方向の水深平均流速、 h は水深、 g は重力加速度、 ϵ は渦動粘性係数($=U_* h/15$)、 $S_{0\psi}$ および $S_{0\phi}$ はそれぞれ ψ および ϕ 方向の河床勾配、 $S_{1\psi}$ および $S_{1\phi}$ はそれぞれ ψ および ϕ 方向の河床摩擦勾配であり、Manning式などから評価される。

3. 数値解法 解析では、まずphase split(相分割)により(1)式を(2)式のように分割し、ある計算ステップ n の解 A^n から次の $(n+1)$ ステップの解 A^{n+1} を(3)式より求める¹⁾²⁾。

$$\partial A / \partial t + \partial B / \partial \psi = D_\psi \quad \partial A / \partial t + \partial C / \partial \phi = D_\phi \quad (2)$$

$$A^{n+1} = \left[L_\psi(\Delta t_\psi) \right]^m \left[L_\phi(\Delta t_\phi) \right]^l \left[L_\psi(\Delta t_\psi) \right]^l \left[L_\phi(\Delta t_\phi) \right]^m A^n \quad (3)$$

ここに、 L_ψ, L_ϕ はそれぞれ(2)式に対応する差分演算子であり、 m および l はそれぞれの演算の繰返し回数である。また、 $\Delta t_\psi, \Delta t_\phi$ は ψ および ϕ 方向の演算における時間ステップであり、全点でCFL条件を満たし、かつ、 $m \cdot \Delta t_\psi = l \cdot \Delta t_\phi$ となるように設定する。概説でも述べたように、 L_ψ, L_ϕ の演算に対して、MacCormackの陽的2段階差分法を適用する²⁾。

4. 試行計算 常流・射流が混在する平面流れの1例として、勾配急変点を有し、軸対象な形で漸拡する広

長方形断面水路の流れを取り上げ(図-1(a)および(b)参照), 表-1に示す流量 Q , 下流端水深 h_b および粗度係数 n の条件下における定常流況の計算を試みた。すなわち, 初期流況は, h_b より十分に大きい下流端水深について1次元の不等流計算により求め, ついで, 下流端水深を h_b まで降下させて固定するという条件のもとで上述の方法による2次元不定流の追跡計算を行い, 目的の流況として, この計算の収斂解を求めることにした。

2次元流解析の計算格子は図-1(a)に示すとおりであって, 跳水や支配断面の予想される区間では縦断方向間隔を細かく設定した。ただし, 格子間隔の急変は数値不安定の原因になるので, それを連続的に変化させた。境界条件の取り扱いには次のようである。まず, 上流および下流端の断面に対しては, それぞれ流量と水深を与え, 他の未知量は適当なボックス形式のスキームにより求めた。一方, 側壁に対しては, $u^x=0$ の条件のみを与える, いわゆるSLIP-CONDITIONを適用することにした。具体的には, 本法による u^x および u^y の計算結果を $u^x=0$ が満足されるように修正するのであるが, このアルゴリズムの構築においては, とくに横断方向にみた運動量の連続性が必ず保証されるように配慮した(詳細は発表時に述べる)。常・射流が混在する流れの数値解析では数値不安定が発生しやすい。これを回避するために本法ではTVD型の人工粘性³⁾を付加した。

計算結果として, 水路中心線上の水面形を図-1(b)に, 流速ベクトルの分布を図-2(c)に示す。支配断面や跳水の位置ならびにその周辺の水面形は, ほぼ妥当なもののように思われる。また, 流速ベクトルの分布も概観する限り不合理な点は見られない。しかし, 流量が跳水部分で局所的に10数パーセント増加していた。この原因と改善策については現在検討中である。

表-1 計算条件

流入流量 Q	10.0(1/s)
下流端水深 h_b	0.06(m)
粗度係数 n	0.025
$\Delta \psi$	2^{-3} (m)
$\Delta \phi$	2^{-4} (m)
最大クーラン数	0.75

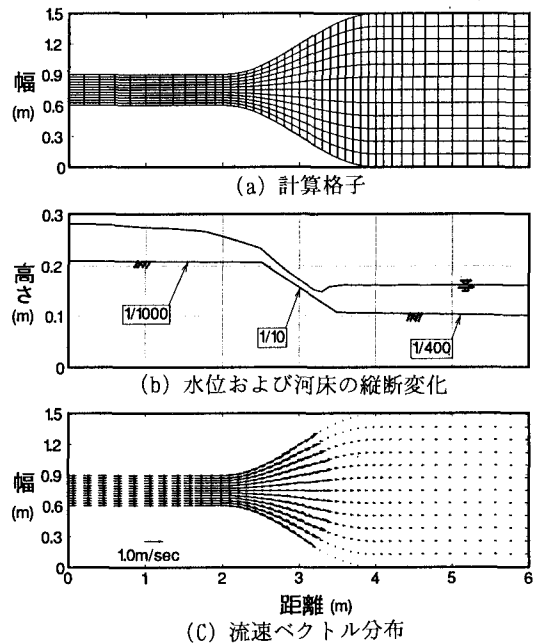


図-1 水路形状および計算結果

[参考文献]

- 1)清水康行・山下恭正・山下彰司・宗田徳彦：一般曲線座標系を用いた常・射流混在流れの計算, 平成2年度「河川に関する調査・試験・研究報告書」, 北海道開発局開発土木研究所, pp.93-108, 1992.
- 2)たとえば, 日本機学会編：流れの数値シミュレーション, コロナ社, 1988.
- 3)D.M.Causon: High Resolution Finite Volume Scheme and Computational Aerodynamics, Non-linear Hyperbolic Equation Theory, Computation Methods and Applications, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.24, pp.63-74, 1989