CS - 51　3段階 Taylor-Galerkin 法による混合層の数値計算

日本大学短期大学部　畑中 勝守　正会員

1．はじめに

移流が卓越する非圧縮粘性流体の有限要素解析手法として、筆者らは３段階 Taylor-Galerkin 法を提案した [1],[2]。しかしながら、これまでの解析ではレイノルズ数がたかだか 1,000 ~ 10,000 程度の計算に留まり、とても高レイノルズ数流れの解析に適用したとはいい難く、したがって本手法の適用性が示されたとはいい難い。そこで、本報告では本手法の高レイノルズ数流れに対する適用性を示すため、Re が 10^7 程度の混合層の発達過程を計算する数値解析を試みた。混合層とは、速度の違う平行流の境界に形成される渦層である。この層はケルビン－ヘルムホルツ型の不安定性によって、不安定なせん断層が相似的な渦層へと発達していったものであると考えられる。ケルビン－ヘルムホルツ型不安定性により混合層が生じるような流れは自然界ではごく身近に観察される流れであるが、そのうち最も単純なものとしては２次元平行流の混合層があり、この実験的研究としては Bernal et.al [3] や Oster et.al[4] の研究がある。そこで本報告では、この２次元平行流の混合層の発達の解析を取り上げ、本手法の高レイノルズ数流れ問題の適用性を示していくこととした。

2．基礎方程式

基礎方程式として、次の２次元 Navier-Stokes 方程式と連続式を用いた。

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \quad (2)$$

ここに、u_i は速度ベクトル、p は圧力、ρ は密度、μ は粘性係数である。これら基礎方程式に対して３段階テイラーガラーキン法を適用し、有限要素方程式を導くと、以下のようになる。（詳細は [1],[2] 参照）

1st step

$$\boldsymbol{Mu}^{n+1/3}=\boldsymbol{Mu}^{n}-\frac{\Delta t}{3}\left\{\boldsymbol{Ku}^{n}-\boldsymbol{Hp}^{n}+\boldsymbol{Su}^{n}\right\} \quad (3)$$

2nd step

$$\boldsymbol{Mu}^{n+2/3}=\boldsymbol{Mu}^{n}-\frac{\Delta t}{2}\left\{\boldsymbol{Ku}^{n+1/3}-\boldsymbol{Hp}^{n}+\boldsymbol{Su}^{n+1/3}\right\} \quad (4)$$

3rd step

$$\boldsymbol{A}p^{n+1}=-\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{Hu}^{n}-\boldsymbol{Ku}^{n+2/3} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{Mu}^{n+1}=\boldsymbol{Mu}^{n}-\Delta t\left\{\boldsymbol{Ku}^{n+2/3}-\boldsymbol{Hp}^{n+1}+\boldsymbol{Su}^{n+2/3}\right\} \quad (6)$$

ここに $\boldsymbol{M},\boldsymbol{K},\boldsymbol{H},\boldsymbol{S},\boldsymbol{A}$ は係数マトリックスであり、またこれらの式では、自然境界条件となる線積分の項はゼロとして計算しているため省略した。

3．数値解析例

２次元混合層の数値解析として図－１の様な条件の下に計算を行った。計算に使用した有限要素は四角形双１次のアイソパラメトリック要素であり、有限要素分割は 60×60 分割とした。入り口境界における流速は高速側の流速を $u_h=10m/s$ に固定し、低速側の流速を $u_l=3.5,5.0m/s$ として計算を行った。計算に用いた各パラメータは $\rho=1.205g/cm-3$、$\mu=1.81g/cm\cdot s$ である。この場合の Re 数は、$Re=(u_h-u_l)(b/2)/\nu$ で計算すれば、$6.5\times10^7, 5.0\times10^7$ となる。図－２に低速側流速 $u_l=3.5m/s$ のときの渦度の時間変化を、図－３に $u_l=5.0m/s$ のときの渦度の時間変化をそれぞれ示す。どちらの場合も混合層の発達過程がよくとらえられている。また、$u_l=3.5m/s$ の結果よりも $u_l=5.0m/s$ の場合の方が混合層が薄くなっていることが判る。なお、本計算は非圧縮性流体を仮定した計算であるため、圧縮性流体の場合のような混合層が高速側の流速に引っ張られて曲げられてしまうといった現象はみられず、混合層は平行流の境界に沿って直線的に構成されていることが判る。

4．おわりに

３段階 Taylor-Galerkin 法の高レイノルズ数流れの数値解析として、２次元平行流内の混合層の発達に関する数値

解析を行った。解析結果ではケルビン－ヘルムホルツ型不安定性により生じた混合層が、本手法により非常によく再現されており、このことから本手法が高レイノルズ数流れに対して有効な解析手法であることが示されたと思われる。今後は、本手法を実際の土木分野の流れ問題に適用していきたいと考えている。

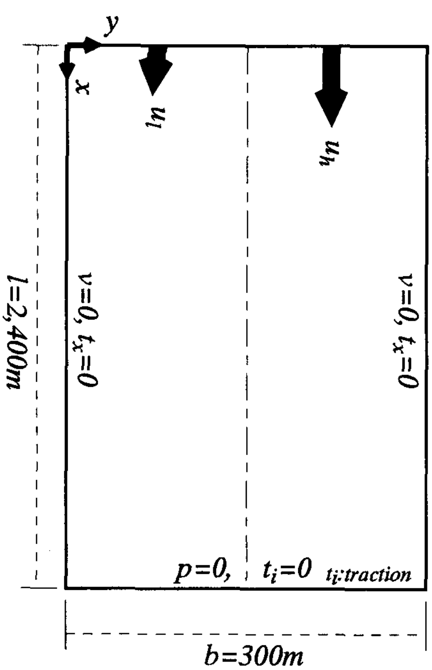
参考文献

[1] 畑中勝守，江春波，川原睦人、３段階テイラーガラーキン法を用いた非定常流体解析、土木学会第４７回年次講学術演会，pp.618-619 (1992)

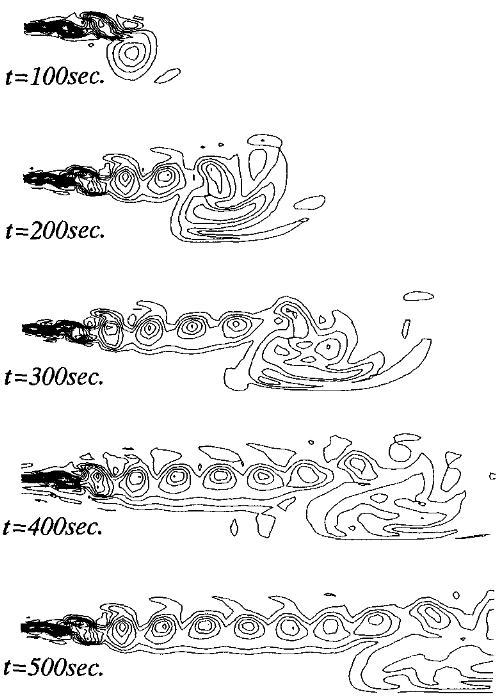
[2] C.B.Jiang et al., A three step finite element method for convection dominated incompressible flows, Computational Fluid Dynamics, vol.1, no.4, pp.447-466 (1993)

[3] L.Bernal et.al., An alubum of fluid motion, Edt. Milton Van Dyke, Parabolic Press, pp.102-103 (1982)

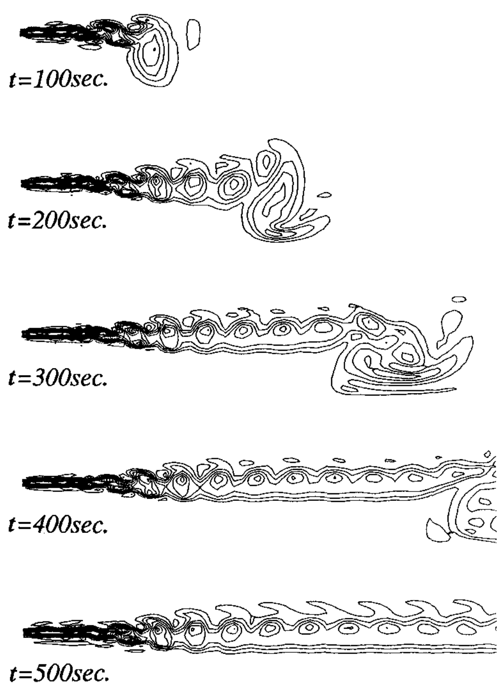
[4] D.Oster et.al., The forced mixing layer between parallel streams, J.Fluid Mech., vol.123, pp.91-130 (1982)



図－１　解析領域と境界条件



図－２　計算結果 (u_l=3.5m/s)



図－３　計算結果 (u_l=5.0m/s)