CS - 50　確率有限要素法による非定常移流拡散解析

中央大学　学生員　本間史祥
中央大学　正会員　樫山和男

## 1. はじめに

これまでの移流拡散解析においては、確定論的な手法が多く論じられてきた。しかし、移流拡散現象の解析において、物質定数などの入力データを確定的に決定づけることは一般に難しい。また、入力データの不確定性に起因する解の変動量を求めることは、工学上重要なことであると考えられる。本論文は非定常移流拡散問題に関して、入力データである拡散係数を不確定データとして取り扱い、摂動法に基づく確率有限要素法を提案し、その有用性について検討を行ったものである。

## 2. 基礎方程式と有限要素方程式

基礎方程式に、式(1)に示す平面二次元の移流拡散方程式を用いる。

$$\dot{c} + (uc)_{,x} + (vc)_{,y} - \kappa\,(c_{,xx} + c_{,yy}) = r \tag{1}$$

ここに、$c$ は濃度、$\kappa$は拡散係数、$u, v$は節点における $x, y$方向流速成分、, は偏微分を表す。

式(1)で示される非定常移流拡散方程式に対して、ガラーキン法を適用し、時間方向にはオイラー法、空間方向には三節点三角形一次要素を用いて得られる離散化方程式は以下の式になる

$$\{C\}^{n+1} = \left[\overline{M}\right]^{-1}\left(\left[\tilde{M}\right]\{C\}^{n} - \Delta t\left([K]\{C\}^{n} + [S]\{C\}^{n}\right)\right) \tag{2}$$

ここに、$[M], [K], [S]$ は有限要素法によって導かれるマトリックスである。また、$\Delta t$ は微小時間増分量、$n$ および $n+1$ は時間ステップを表す。

## 3. 1次摂動法に基づく確率有限要素法の適用

本論文では、拡散係数を不確定データと仮定し、1次摂動法に基づいた解析を行う。拡散係数を次のような確率変数を含んだ式で仮定する。

$$\kappa = \overline{\kappa}\,\{1 + \alpha\,(x_k, y_k)\} \tag{3}$$

ここに、$\overline{\kappa}$は $\kappa$の期待値、$\alpha\,(x_k, y_k)$ は各要素における期待値0の微小確率変数である。これを剛性マトリックスに代入し、テーラー展開を施し、$\alpha\,(x_k, y_k)$ の1次の項$\alpha_k$まで考慮することにより得られる全体剛性マトリックスは、式(4)のような微小変動量を持つマトリックスになる。また、ある時間ステップ $n$ における未知濃度については式(4)の整合性を考慮し式(5)を仮定する。

$$[K] = \left[K^{0}\right] + \sum_{k=1}^{mx}\left[K_k^{I}\right]\alpha_k \tag{4}$$

$$\{C\}^{n} = \left\{C^{0}\right\}^{n} + \sum_{k=1}^{nx}\left\{C_k^{I}\right\}^{n}\alpha_k \tag{5}$$

ここで、$\left[K^{0}\right]\left\{C^{0}\right\}^{n}$は期待値を表し、$\left[K_k^{I}\right], \left\{C_k^{I}\right\}^{n}$ はそれぞれ、$[K], \{C\}^{n}$ の$\alpha_k$に関する偏微分マトリックスを表す。式(4), (5)を式(2)に代入し、両辺の各項を等値とすることによって得られる式は式(6),(7)で表される。

$$\left\{C^{0}\right\}^{n} = \left[\overline{M}\right]^{-1}\left(\left[\tilde{M}\right]\left\{C^{0}\right\}^{n} - \Delta t\left(\left[K^{0}\right]\left\{C^{0}\right\}^{n} + [S]\left\{C^{0}\right\}^{n}\right)\right) \tag{6}$$

$$\left\{C_k^{I}\right\}^{n} = \left[\overline{M}\right]^{-1}\left(\left[\tilde{M}\right]\left\{C^{0}\right\}^{n} - \Delta t\left(\left[K_k^{I}\right]\left\{C^{0}\right\}^{n} + \left[K^{0}\right]\left\{C_k^{I}\right\}^{n} + [S]\left\{C_k^{I}\right\}^{n}\right)\right) \tag{7}$$

統計量の評価として、各節点における濃度の期待値と分散値を評価する。期待値、分散値は次の式で表される。

$$E\left[\{C\}^{n}\right] = \left\{C^{0}\right\}^{n} \quad , \quad var\left[\{C\}^{n}\right] = \sum_{i=1}^{nx}\sum_{j=1}^{nx}\left\{C_i^{I}\right\}^{n}\left\{C_j^{I}\right\}^{n}E\left[\alpha_i\alpha_j\right] \tag{8}$$

ここに、$E\left[\alpha_i\alpha_j\right]$ は、$\alpha_i, \alpha_j$ の共分散である。

## 4. 数値解析例

本手法の有用性を検討するために、図1の水路内の移流拡散問題に適用し、Box-müllar の方法によって正規分布に従った乱数を用いた繰り返し計算（モンテカルロ法）との比較を行った。計算条件としては、水路内の流速を一定とし、初期条件としてO点に $10.0ppm$ の濃度を与え、拡散係数の期待値を $0.5(m^2/sec)$ とした。また、入力確率変数は標準偏差を0.1とした。図2に観測点 $A$ 点での時間変化による期待値と分散値の変化を表す。これにより両者は良い一致を示し、本手法の有用性が確認される。また、図3にサンプル数による計算時間の比較を表す。このことから、本手法はサンプル数の多い問題に関しては、従来法よりも計算時間の点で有利な方法であると考えられる。

次に、実地形モデルへの適用例として、図4に表すような東京湾を取り上げ、潮流下における移流拡散解析を行った。計算条件として、図4のO点に初期条件として $10.0ppm$ の濃度を与え、拡散係数の期待値を $30.0(m^2/sec)$ とした。また、入力確率変数としては前者と同様のものとした。一方、流れ場については、浅水長波方程式を用い、湾口より、周期12時間、振幅 $0.6m$ の $sin$ 波を送った。ここで、渦動粘性係数を $10.0(m^2/sec)$、海底摩擦係数を0.01とし、解析手法としては2段階陽解法[4] を用いた。図5に濃度の期待値と $3\sigma$ 限界の分布図を表す。これにより、濃度を与えた付近での分布に差異が見られ、入力データの不確定性に起因する解の変動量が評価されていることが分かる。

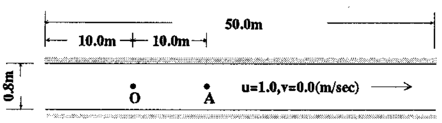


図1：解析モデル

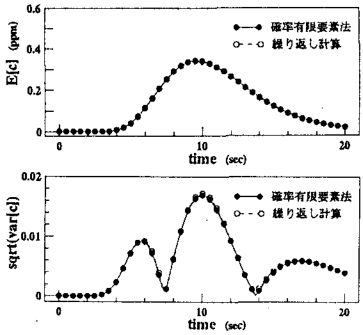


図2：時間推移による濃度と分散値の変化

サンプル数500

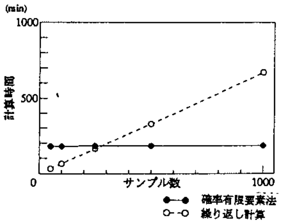


図3：計算時間の比較

*VPX200/10使用*

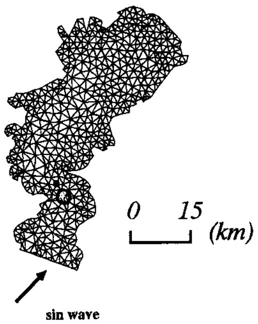
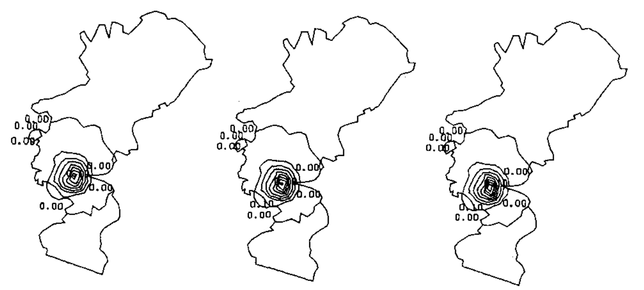


図4：東京湾モデル

要素数**1007**, 節点数**604**



−3σ　期待値　+3σ

図5：濃度分布図　**time=6(hour)**

## 5. おわりに

本論文において、不確定入力データに対する確率有限要素法の適用を行い、有用性の検討をおこなった。これにより、サンプル数の多いデータに対し、繰り返し計算をすることなしに計算を行うことが可能となった。今後は、計算効率の向上と、複数の不確定要因に対する解析を行う予定である。

## 参考文献

[1] 中桐滋, 久田俊明 :"確率有限要素法入門", 培風館出版

[2] 本間史祥, 樫山和男:"確率有限要素法による非定常地下水流れ解析", 土木学会第48回年次学術講演会,pp366-367(1993)

[3] 櫻庭雅明, 樫山和男 : "入力データの不確定性を考慮した水面波動問題の確率有限要素解析", 水工学論文集第37巻,pp775-780(1993)

[4]Mutsuto Kawahara, Hirokazu Hirano, Khoji Tsubota and Kazuo Inagaki : "Selective lumping finite element method for shallow water flow", International Jornal For Numerical Methods in Fluids , Vol.2, pp89-112 (1982)