CS - 40

渦膜法による物体まわりの過渡的流れの解析

福井大学大学院　学生員　西川泰樹
福井大学工学部　正　員　福井卓雄

1. はじめに

本報告では，渦膜法を用いた物体まわりの非定常流れの解析について述べる．渦膜法ではよく知られた渦糸法と同様に流れをポテンシャル流れとその中に存在する渦による流れの和として表現しようとする．ただし，渦膜法においては渦糸法の離散的な渦糸のかわりに境界層より剥離した渦膜(速度せん断層)を，後流域に連続して発生させて流れを表現する[1]．ここでは，2次元流れの場を流れ関数で表現し，そこに連続な渦膜を導入し，非定常な物体まわりの流れの場を解析する手法を解説する．流れ関数の場合，速度ポテンシャルよりもむしろ数値的な取扱が容易であり，流線も求めやすいというメリットがある．

2. 流れの支配方程式

2次元の無限領域中に存在する物体のまわりの流れは，流れ関数 $\bar{\psi} = \psi_0 + \psi_B + \psi_\Gamma$ により表すことができる．ここで，ψ_0 は外部で与えらた流れの場，ψ_B は物体が存在することによる補正分，ψ_Γ は渦膜による流れとする．このときの流速と渦度は，

$$v = \nabla \times \bar{\psi} k \qquad \omega = \nabla \times v = -\nabla^2 \bar{\psi} k \qquad (1)$$

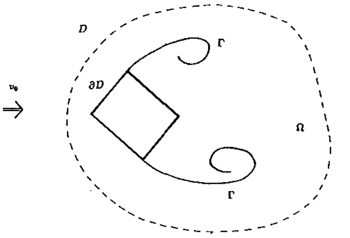


図1: 物体周りの流れ

である．

いま，流体が静止していた状態から突然動き始めたと考えると，流体が止まっているときと動き始めてからの物体と渦膜を含めて取り囲む物質閉曲線 s の中では，循環はゼロに保たれる．γ を2次元面内での単位長当りの渦膜の線渦密度とすると，上の条件は，ストークスの定理により，

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \;=\; -\int_\Gamma \gamma ds \qquad (2)$$

と書くことができる．ここに，$\partial/\partial n$ は渦膜境界上における外向き法線微分であり，Γ は渦膜を表している．

新たな流れ関数 $\psi = \psi_B + \psi_\Gamma$ を考え，渦膜の線密度 γ が他の条件により決定できるとすれば，物体の周りの渦膜を伴う流れは，

$$\nabla^2 \psi \;=\; -\gamma \qquad (\text{in } D) \qquad\qquad \psi \;=\; -\psi_0 + c \qquad (\text{on } \partial D) \qquad (3)$$

を満足する．すなわち，Poisson 方程式の外部 Dirichlet 境界値問題 (3) に付加条件式 (2) が加わった問題となる．また c は物体まわりの循環量を表す未定定数である．

3. 境界積分方程式

ψ_0 および γ が与えられるとき，境界値問題 (3) は境界における勾配 $\partial\psi/\partial n$ に関する境界積分方程式

$$c - \int_{\partial D} G(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial n}(y)\,ds(y) = \frac{1}{2}\psi_0(x) + \text{v.p.}\int_{\partial D}\frac{\partial G(x;y)}{\partial n(y)}\psi_0(y)\,ds(y) + \int_D G(x;y)\gamma(y)\,dA(y) \qquad (4)$$

と等価になる．ただし c を決定するためには条件 (2) が必要である．ここで，基本解 $G(x;y) = 1/2\pi \log(1/|x-y|)$ 右辺第二項の積分における v.p. は，Cauchy の主値積分を表している．

4. 渦膜の生成と移動と追跡

渦膜の生成を考えてみよう．渦膜は物体まわりの境界層の剥離により生成する．剥離点における境界層のすぐ外側の流速を U とすると単位時間に剥離点で生成される循環量は，渦が流下する速度を考慮に入れて

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}|U|U \tag{5}$$

と表される．

次に渦膜の移動を考えてみる．生成された渦膜は流れに乗って流下し，後流を形成する．渦膜はその面の両側において速度のジャンプがあるのにもかかわらず，物質曲面として行動する．渦膜を滑らかに移動させるためには次のような手順を用いた．

(1). 渦膜要素の中点の流速求め，その点の Δt 時間の移動量を決める．

(2). 渦膜の位置として，渦膜生成点 (剥離点) と各渦膜要素中点の移動点を結ぶ３次スプライン曲線を求める．

(3). スプライン曲線上に各移動点間の中点を選び，それを新しい直線要素の分割点として，新しい位置の渦膜を近似する．

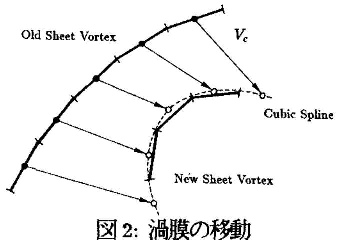


図 2: 渦膜の移動

新しい要素が長すぎる場合にはスプライン曲線上に新しい分割点をとって要素を再分割する．新しいステップの渦密度は，循環が Kelvin の循環定理により保存されるから，

$$\gamma(t)ds(t) = \gamma_0 ds_0 \tag{6}$$

になる．ただし，γ_0 は渦膜生成時の渦密度であり ds_0 は生成時の線素である．

渦膜の持つ渦密度の拡散による損失を考慮することにより，ある程度流体の粘性を解析の中に取り入れることとし，次のようなモデル化を考える．２次元流れの場合には渦度 ω は次の拡散方程式を満足する．

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu\Delta^2\omega \tag{7}$$

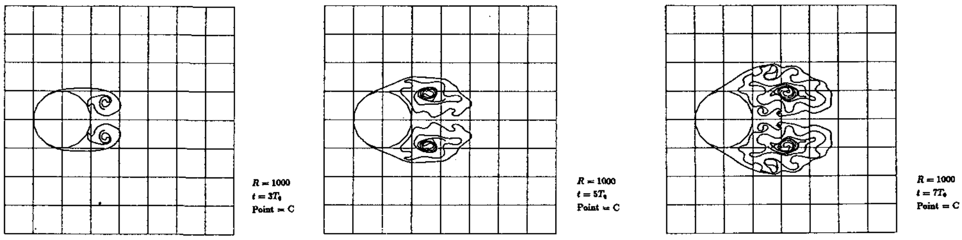
ただし，ν は動粘性係数であり，D/Dt は Stokes 微分である．渦膜の効果がある幅 l を持つと仮定すると，渦密度 γ について (7) の差分表現を

$$\begin{aligned}\gamma_i(t+\Delta t) \quad &= \quad \frac{2\nu\Delta t}{\Delta s_i(\Delta s_i + \Delta s_{i-1})}\gamma_{i-1}(t) \\ &+ \left[1 - \frac{2\nu\Delta t(\Delta s_{i-1} + 2\Delta s_i + \Delta s_{i+1})}{\Delta s_i(\Delta s_i + \Delta s_{i-1})(\Delta s_i + \Delta s_{i+1})} - \frac{2\nu\Delta t}{l^2}\right]\gamma_i(t) + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta s_i(\Delta s_i + \Delta s_{i+1})}\gamma_{i+1}(t)\end{aligned} \tag{8}$$

と表すことができる．ここで，$\gamma_{iR} = \gamma_{iL} = 0$ とした．

5. 解析結果とその検討

円柱まわりの急発進流の解析結果を示す．時間の経過とともに後流渦の成長する様子，それに伴う剥離点の移動が表されている．



現在，この方法で得られた結果と Navier-Stokes の方程式の数値解析と比較して，適切な離散化パラメーターと渦移動アルゴリズムを決定する試みを行っている．

参考文献

(1) 福井卓雄，渦膜法による角柱群のまわりの流れの解析，計算力学 [III] （登坂宣好; 矢川元基 共編）養賢堂, pp 201-216 (1992)